Wichtige Theoreme der Signaldatenverarbeitung.

 Karl-Heinz Dittberner

In der modernen Signaldatenverarbeitung – auch der Analyse von biologischen Signalen – spielen mathematische Theoreme der allgemeinen Systemtheorie, der Informationstheorie und z. B. der Fourier Transformation eine wichtige Rolle.

In diesem Merkblatt sind einige wichtige Theoreme und Formeln für *kontinuierliche* Signale, d. h. für Funktionen $f(x)$ bzw. $f(x,y)$ zusammengestellt [1–4]. Das sind u. a. die Definitionsgleichungen für das *Amplituden-*, *Phasen-* und *Powerspektrum*. Die Operation der *Faltung* zweier Signale spielt bei der Verarbeitung von ein- und zweidimensionalen Signalen eine zentrale Rolle. Im Prinzip stellt die Faltung eine besondere Tiefpaßfilterung dar. Die *Autokorrelationsfunktion* eines Signals ist ein Spezialfall der Faltung – die Faltung eines Signals mit sich selbst – und ist identisch mit dem Powerspektrum des Signals. Mit der *Kreuzkorrelationsfunktion* zweier Signale können die zugrundeliegenden stochastischen Prozesse beschrieben werden. Mit Hilfe der angegebenen *Theoreme* lassen sich leicht weitere Beziehungen ableiten.

Bei Computerberechnungen mit realen Signaldaten müssen die (Signal-)Funktionen natürlich durch endliche Folgen in $\mathbf{l}^2$, dem Hilbertschen Folgenraum [4] – also durch abgetastete Signale – sowie die unendlichen Integrale durch endliche Summen ersetzt werden. Zu diesen und anderen Fragen der Signaldatenverarbeitung sind spezielle Merkblätter erschienen [5].

1. Definition von Größen und Notation:

$\mathbf{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen $= \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$.
$\mathbf{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen (integer) $= \{\ldots, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$.
$\mathbf{R}$ = Menge der rellen Zahlen (real).
$\mathbf{C}$ = Menge der komplexen Zahlen (complex).
e = Eulersche Zahl $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,828\ldots$
j = Imaginäre Einheit $= \sqrt{-1}$; $\quad j^2 = -1$.
$\pi = 3{,}141\,592\,654\ldots$
$\ldots \in \ldots$ = … ist Element der Menge …
$|\ldots|$ = Absoluter Betrag von …
$\|\ldots\|$ = Norm von …
$\overline{g}(x)$ = Zu $g(x)$ konjugiert komplexe Funktion.
$f * g$ = Faltung (convolution) der Funktionen f und g.
$\mathbf{R}^n$ = Euklidischer Raum von n Dimensionen.
$\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ = Hilbert Raum, ein Sonderfall eines Banachraumes. Menge der meßbaren, quadratintegrablen n-dimensionalen Funktionen.
$\mathbf{l}^2$ = Hilbertscher Folgenraum. Menge der Folgen $s = (a_n)$ komplexer (und reeller) Zahlen für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ ist, also konvergieren.

(a_n) = Folge der Werte $a_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$; $\ n \in \mathbf{N}$.
$f(x)$ = (Signal-)Funktion der kontinuierlichen Variablen x; Zeitfunktion, wenn x die Zeit t ist; $f \in \mathbf{R}$.
$f(x,y)$ = (Signal-)Funktion der kontinuierlichen Variablen x und y, ein Bild; $f \in \mathbf{R}$.
$f[n] = f(n\,\Delta t)$ = Folge der von $f(t)$ im Abstand Δt abgetasteten Werte; $n = t/\Delta t$, $\ n \in \mathbf{Z}$.
$f[n_x, n_y] = f(n_x\,\Delta x, n_y\,\Delta y)$ = 2-dim. Folge der Werte eines im Abstand Δx bzw. Δy (Pixelgröße) abgetasteten Bildes. Meist gilt: $\Delta x = \Delta y = 1/d$, wobei d die Abtastungsauflösung in $pixel/mm$ ist; $n_x = x/\Delta x$, $n_y = y/\Delta y$, $(n_x, n_y) \in \mathbf{Z}$.
ω = Kreisfrequenz $= 2\pi f$ mit der Frequenz f. ω kann positive und negative Werte annehmen, $\omega \in \mathbf{R}$. Negative ω bedeuten eine Drehung des Zeigers in der komplexen Zahlenebene im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn.
$F(\omega)$ = Fourier Transformation von $f(x)$, das komplexe Frequenzspektrum (kurz: Spektrum) der kontinuierlichen Variablen ω.
$F(\omega_x, \omega_y)$ = 2-dim. kontinuierliches Spektrum eines Bildes.

2. Die kontinuierliche Fourier Transformation (FT):

Für *eindimensionale* Signale $f(x)$ gilt das Transformationsgleichungspaar (1) und (2), wobei die Gleichung (2) die inverse Fourier Transformation (IFT) ist. Die Fourier Transformation $F(\omega)$ ist eine Funktion der reellen Variablen ω. $F(\omega)$ ist das komplexe Frequenzspektrum des Signals $f(x)$ und läßt sich in einen Real- und Imaginärteil zerlegen.

1-D

FT
$$F(\omega) = \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-j\omega x}\,dx \qquad (1)$$

IFT
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega x}\,d\omega \qquad (2)$$

$$F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j\cdot \mathrm{Im}\{F(\omega)\} = |F(\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3)$$

wobei das *Amplitudenspektrum* des Signals

$$|F(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(\omega)\}^2} \quad \text{und} \qquad (4)$$

das *Phasenspektrum* $\varphi(\omega) = \arctan\dfrac{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}}{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}$ ist. $\qquad (5)$

In vielen Fällen ist es notwendig, das Amplitudenspektrum in einer normierten logarithmischen Darstellung anzugeben. Die Normierung erfolgt dabei auf den Wert $|F(\omega_0)|$, *wobei* ω_0 eine gewählte charakteristische Frequenz ist.

Das normierte Amplitudenspektrum $A(\omega)$ in Dezibel (dB) ist definiert durch die Gleichung (6):

$$A(\omega) = 20\cdot \lg\frac{|F(\omega)|}{|F(\omega_0)|}. \qquad (6)$$

Die Fläche unter dem Signal $f(x)$ ist der „DC-Wert“:

$$\int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(\omega = 0) = F(0). \qquad (7)$$

3. Das Leistungs/Energie-Spektrum:

Allgemein gilt physikalisch, daß die Energie (energy) oder die Leistung (power) eines Vorgangs im $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ – auch im $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ – das Produkt zweier konjugierter (dualer) Größen $f(x)$ und $g(x)$ – einer Extensitäts- und einer Intensitätsgröße (z. B. Kraft und Geschwindigkeit, Spannung und Strom, elektrische und magnetische Feldstärke) – integriert über die Zeit oder den Raum ist. Im allgemeinen Fall gilt für komplexe Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\bar{g}(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot\bar{G}(\omega)\,d\omega\,. \tag{8}$$

Für reelle Signale $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g(-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot G(\omega)\,d\omega\,. \tag{9}$$

In allgemeinen Systemen ist der Quotient f/g die (allgemeine) *Impedanz*. Ist diese konstant (*Tip*: Man denke an das Ohmsche Gesetz $U=R\bullet I$), läßt sich die Energie oder die Leistung immer durch das Quadrat einer der Größen ausdrücken. Dieses führt zum Parseval-Rayleigh Theorem [1, 2] mit dem sich die *Norm* von $f(x)$, das ist die gesamte Energie bzw. Leistung P_{ges}, berechnen läßt:

$$P_{ges}=\|f(x)\|^2=\int_{x=-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega\,. \tag{10}$$

$|F(\omega_0)|^2$ ist das *Powerspektrum*. Das normierte Powerspektrum in Dezibel (dB) wird dann berechnet mit:

Power-spektrum

$$\boxed{P(\omega)=10\cdot\lg\frac{|F(\omega)|^2}{P_{ges}}\,.} \tag{11}$$

4. Die Faltung:

In der Signaldatenverarbeitung spielt die Faltung (convolution) eine wichtige Rolle. Die Operation der Faltung entspricht einem Meßinstrument, daß über ein Signal $f(x)$ mittels der Gewichtsfunktion (kernel) $g(x)$ ein „laufendes, gewogenes" Mittel mißt (siehe dazu auch Abb. in [1]). Die Faltung zweier *eindimensionaler* Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist definiert mit, wobei $(f,g)\in\mathbf{R}$ und $(-\infty<x<+\infty)$:

1-D

$$\boxed{h(x)=f*g=\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot g(x-u)\,du\,.} \tag{12}$$

Darin ist $g(x-u)$ die Alias-Funktion zu $g(u)$, d. h. $g(x-u)$ ist an der vertikalen Linie $u=x/2$ gespiegelt, $g(u)$ wird hier „gefaltet". Im Fourierbereich gilt dann

1-D

$$\boxed{H(\omega)=F(\omega)\cdot G(\omega)\,.} \tag{13}$$

Die Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich entspricht also der Multiplikation ihrer Fourier Transformationen. Die Faltung von *zweidimensionalen* Signalen (z. B. Graustufenbilder) $f(x,y)$ mit dem Kernel $g(x,y)$ ist definiert mit, wobei $(f,g)\in\mathbf{R}$:

2-D

$$h(x,y)=f**g=\int_{v=-\infty}^{+\infty}\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u,v)\cdot g(x-u,y-v)\,du\,dv\,. \tag{14}$$

Im Fourierbereich gilt hier:

$$H(\omega_x,\omega_y)=F(\omega_x,\omega_y)\cdot G(\omega_x,\omega_y)\,. \tag{15}$$

5. Die Autokorrelation (AKF):

Für *eindimensionale* komplexe Funktionen $f(x)$ in $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ ist die *Autokorrelationsfunktion* (autocorrelation):

$$\psi_{AKF}(x)=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\bar{f}(u)\cdot f(u+x)\,du\,, \tag{16}$$

woraus für reelle Signale $f(x)$ folgt, mit $(-\infty<x<+\infty)$:

$$\psi_{AKF}(x)=\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot f(u+x)\,du\,. \tag{17}$$

Mit der Fourier Transformation $F(\omega)$ des Signals folgt:

1-D

$$\boxed{\psi_{AKF}(x)=|F(\omega)|^2\,.} \tag{18}$$

Die AKF eines Signals entspricht also dem Powerspektrum des Signals, was auch für *zweidimensionale* Signale $f(x,y)$ in $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$ gilt:

2-D

$$\boxed{\psi_{AKF}(x,y)=\left|F(\omega_x,\omega_y)\right|^2\,.} \tag{19}$$

Mit P_{ges} nach Gleichung (10) läßt sich die AKF normieren, z. B. wie in Gleichung (11).

6. Die Kreuzkorrelation (KKF):

Die *Kreuzkorrelationsfunktion* (cross correlation) von zwei *eindimensionalen* komplexen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, $(f,g)\in\mathbf{C}$ ist definiert als

$$\psi_{KKF}(x)=\int_{u=-\infty}^{+\infty}\bar{f}(u)\cdot g(u+x)\,du\,, \tag{20}$$

woraus für reelle Signale $f(x)$ und $g(x)$ folgt:

1-D

$$\boxed{\psi_{KKF}(x)=\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot g(u+x)\,du\,.} \tag{21}$$

Beim Vertauschen der Signale f und g ergibt sich $\psi_{KKF}(-x)$. Auch die KKF hat, wie die AKF, bei $x=0$ ihr Maximum, auf das beide normiert werden können, d. h. dann wird $\psi_{KKF}(0)=1$ bzw. $\psi_{AKF}(0)=1$.

7. Weitere Theoreme:

Theorem	$f(x)$	$F(\omega)$	
Addition (Linearität)	$f(x)+g(x)$	$F(\omega)+G(\omega)$	(22)
Konst. Multiplikation	$a\cdot f(x)$	$a\cdot F(\omega)$ mit $a\in\mathbf{R}$	(23)
Maßstabsänderung	$f\left(\frac{x}{a}\right)$ $a\neq 0$	$\lvert a\rvert\cdot F(a\omega)$ mit $a\in\mathbf{R}$	(24)
Verschiebung	$f(x-b)$	$e^{-jb\omega}\cdot F(\omega)$ mit $b\in\mathbf{R}$	(25)
Faltung im Zeitbereich	$f(x)*g(x)$	$F(\omega)\cdot G(\omega)$	(26)
Multiplikation	$f(x)\cdot g(x)$	$\frac{1}{2\pi}\cdot[F(\omega)*G(\omega)]$	(27)
Modulation $(\omega_0\in\mathbf{R})$	$f(x)\cdot\cos\omega_0 x$	$\frac{1}{2}\cdot F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\cdot F(\omega+\omega_0)$	(28)
Autokorrelation	$f(x)*\bar{f}(-x)$	$\lvert F(\omega)\rvert^2$	(29)
Differentiation	$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$	$(j\omega)^n\cdot F(\omega)$	(30)
Ableitung der Faltung	$\frac{d}{dx}[f(x)*g(x)]$	$j\omega\cdot[F(\omega)\cdot G(\omega)]$	(31)
	$=\frac{d\,f(x)}{dx}*g(x)$	$[j\omega\,F(\omega)]\cdot G(\omega)$	(32)
	$=f(x)*\frac{d\,g(x)}{dx}$	$F(\omega)\cdot[j\omega\,G(\omega)]$	(33)

◀ In dieser Tabelle sind weitere wichtige Theoreme für Signale $f(x)$ zusammengestellt, dabei ist $F(\omega)$ die jeweilige Fourier Transformation nach Gleichung (1).

8. Literatur:

[1] Bracewell, Ronald N.: The Fourier Transform and Its Applications. New York: Mc Graw Hill 1978 (2. Auflage). — ***Hinweis***: Achtung! Die in diesem Buch durchgehend verwendete Variable s ist die Frequenz und nicht die Kreisfrequenz, $s=\omega/2\pi$.

[2] Dreszer, Jerzy (Ed.): Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Zürich: Harry Deutsch 1975. ISBN: 3-87144-149. Preis: 59,80 DM.

[3] Heuser, Harro: Funktionalanalysis – Theorie und Anwendung. Stuttgart: Teubner 1986. ISBN: 3-519-12206-5. Preis: 84,- DM.

[4] Meschkowski, Herbert: Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher Nr. 99/99a. Mannheim: Bibliographisches Institut 1966 (2. Auflage).

[5] Dittberner, K.-H.: wdv-notes: Verzeichnis nach Sachgruppen. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 200, 1993–1996.

Auf einem Macintosh Computer Quadra-700 mit Aldus PageMaker 5.0 und Design Science MathType 3.0 angefertigt.