

Die Methoden der Funktionaltransformation [3] – insbesondere die der Fourier-Transformation [1–2] – sind eines der leistungsfähigsten Werkzeuge der Signal­daten­verarbeitung sowie der Untersuchung von signalverarbeitenden Systemen, auch von biologischen Systemen [7].

In der biologischen Grundlagenforschung werden solche Methoden häufig – oft aus Unkenntnis – auch dann nicht eingesetzt, wenn es eigentlich naturwissenschaftlich geboten wäre. In diesen Fällen wird vermutlich das „Geheimnis“, das in den mühsam und oft mit sehr großem Aufwand gewonnenen Daten stecken könnte, kaum entdeckt werden. So bleibt das vielleicht „beste Ergebnis“ oft unerforscht. Schade. –

Ein *Signal* ist eine Funktion von einer oder von mehreren Variablen. Bei eindimensionalen Signal-Funktionen ist die Variable meistens die Zeit  $t$  (Zeitfunktionen). Bilder sind Signal-Funktionen mit zwei Variablen  $x$  und  $y$  (Breite und Höhe).

Die *Variablen* können kontinuierlich (analoges Signal) oder diskret (digitales oder abgetastetes Signal) sein. Ein eindimensionales zeit-diskretes Signal ist eine endliche oder unendliche Folge von Abtastwerten (samples).

Ein *System* stellt immer einen mathematischen Operator dar (quasi eine Vorschrift), die ein Signal, das Eingangssignal in ein anderes Signal, das Ausgangssignal transformiert.

Ein *Filter* ist ein besonderes (zeitunabhängig lineares) System. Es ist durch seine *Impulsantwort* (impulse response) eindeutig charakterisiert. Die Kenntnis der Impulsantwort erlaubt es, für jedes beliebige Eingangssignal das Ausgangssignal zu bestimmen, denn das Ausgangssignal ist die Faltung (convolution) [7] des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Filters.

Auch in der biologischen Grundlagenforschung geht es häufig darum, das Verhalten von (Teil-)Systemen, die näherungsweise als linear betrachtet werden, aufzuklären, d. h. die Vorschrift – den mathematischen Operator des Systems – herauszufinden, der die biologischen Signale „transformiert“.

Für die Handhabung solcher Analysen in der Praxis ist u. a. die Kenntnis der verschiedenen Formen der Fourier-Transformation unbedingte Voraussetzung, die ausführlich in [1] behandelt werden. Im folgenden ist ein kurzer Abriss der verschiedenen Definitionen und ihrer Bedeutung in der Signal­daten­verarbeitung zusammengestellt.

**1. Definition von Größen und Notation:**

**N** = Menge der natürlichen Zahlen = { 1, 2, 3, ... }.

**Z** = Menge der ganzen Zahlen (integer)  
= { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }.

**R** = Menge der reellen Zahlen (real).

**C** = Menge der komplexen Zahlen (complex).

$e$  = Eulersche Zahl =  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718\ 281\ 828\ \dots$

$j$  = Imaginäre Einheit =  $\sqrt{-1}$ ;  $j^2 = -1$ .

$\pi = 3,141\ 592\ 654\ \dots$

$\dots \in \dots = \dots$  ist Element der Menge ...

$|\dots|$  = Absoluter Betrag von ...

$\|\dots\|$  = Norm von ...

$\langle f | g \rangle$  = Skalarprodukt der Funktionen  $f$  und  $g$  im  $L^2(\mathbf{R}^1)$ .

$\mathbf{R}^n$  = Euklidischer Raum von  $n$  Dimensionen.

$L^2(\mathbf{R}^n)$  = Hilbert Raum, ein Sonderfall eines Banachraumes.

Menge der meßbaren, quadratintegrablen  $n$ -dimensionalen Funktionen.

$l^2$  = Hilbertscher Folgenraum. Menge der Folgen

$s = (a_n)$  komplexer (und reeller) Zahlen

für die  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$  ist, also konvergieren.

$(a_n)$  = Folge der Werte  $a_n = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ;  $n \in \mathbf{N}$ .

$f(x)$  = (Signal-)Funktion der kontinuierlichen Variablen  $x$ ; Zeitfunktion, wenn  $x$  die Zeit  $t$  ist;  $f \in \mathbf{R}$ .

$f(x, y)$  = (Signal-)Funktion der kontinuierlichen Variablen  $x$  und  $y$ , ein Bild;  $f \in \mathbf{R}$ .

$f[n]$  =  $f(n \Delta t)$  = Folge der von  $f(t)$  im Abstand  $\Delta t$  abgetasteten Werte;  $n = t/\Delta t$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

$f[n_x, n_y]$  =  $f(n_x \Delta x, n_y \Delta y)$  = 2 - dim. Folge der Werte eines im Abstand  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  (Pixelgröße) abgetasteten Bildes. Meist gilt:  $\Delta x = \Delta y = 1/d$ , wobei  $d$  die Abtastungsauf­lösung in *pixel/mm* ist;  $n_x = x/\Delta x$ ,  $n_y = y/\Delta y$ ,  $(n_x, n_y) \in \mathbf{Z}$ .

$\omega$  = Kreisfrequenz =  $2\pi f$  mit der Frequenz  $f$ .  $\omega$  kann positive und negative Werte annehmen,  $\omega \in \mathbf{R}$ . Negative  $\omega$  bedeuten eine Drehung des Zeigers in der komplexen Zahlenebene im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn.

$F(\omega)$  = **Fourier Transformation** von  $f(x)$ , das komplexe Frequenzspektrum (kurz: Spektrum) der kontinuierlichen Variablen  $\omega$ .

$F(\omega_x, \omega_y)$  = 2 - dim. kontinuierliches Spektrum eines Bildes.

**2. Sinusoidale Größen:**

Zeitabhängige Größen  $s$  in der Form (Abb. 1)

$$s = f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

bezeichnet man als sinusoidale Größen mit der *Amplitude*  $A$ , der *Kreisfrequenz*  $\omega$  und dem *Anfangsphasenwinkel*  $\varphi_0$ .

Die *Periodendauer*  $T$  einer solchen Sinusschwingung ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Die Gleichung (1) kann auch in folgender Form angegeben werden:

$$s(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \tag{3}$$

$$\text{mit } A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \arctan \frac{b}{a} \tag{4}$$

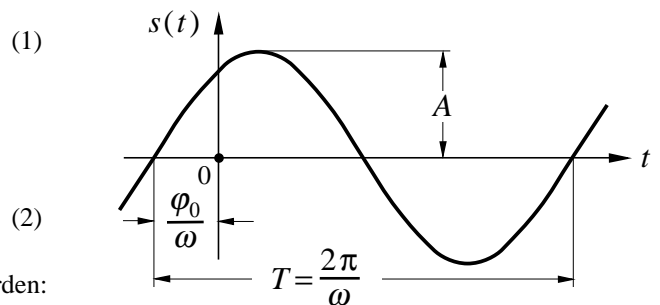


Abb. 1: Sinusschwingung  $s(t)$ .  $T$  ist die Periodendauer der Schwingung.

Die zeitabhängige Größe  $s(t)$  läßt sich in der komplexen Zahlenebene darstellen mit:

$$s = A [\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)] = A e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad (5)$$

Dieses läßt sich als ein komplexer Zeiger mit der Amplitude  $A$  deuten (Abb. 2), der sich um den Nullpunkt mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Drehfrequenz  $f$ ) im mathematisch positiven Sinn dreht (Drehzeiger). In allgemeiner algebraischer Schreibweise ist (5):

$$s = A e^{j(\omega t + \varphi_0)} = a + jb \quad ; \text{ also ist } s \in \mathbf{C} \quad (6)$$

mit der Amplitude  $A = |s| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (7)$

und der Phase (Drehwinkel)  $\varphi = \arctan \frac{b}{a} = \omega t + \varphi_0. \quad (8)$

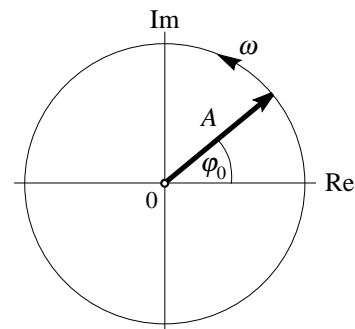


Abb. 2: Komplexer Drehzeiger  $s(t)$ , der sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegen dem Uhrzeiger dreht.

### 3. Die kontinuierliche Fourier Transformation (FT):

Für *eindimensionale* Signale  $f(t)$  (Zeitfunktionen) gilt das Transformationsgleichungspaar (9) und (10), wobei die Gleichung (10) die inverse Fourier-Transformation (IFT) beschreibt.

Die Fourier-Transformation  $F(\omega)$  ist eine Funktion der reellen Variablen  $\omega$ .  $F(\omega)$  ist das komplexe Frequenzspektrum des Signals  $f(t)$ .  $A$  und  $B$  sind die Normfaktoren (siehe Punkt 4).

1 - D

<b>FT</b>	$F(\omega) = A \cdot \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	(9)
<b>IFT</b>	$f(t) = B \cdot \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$	(10)

Für *zweidimensionale* Signale  $f(x, y)$  (z. B. Graustufen-Bilder) gilt das Transformationspaar (11) und (12). Die Fourier-Transformation  $F(\omega_x, \omega_y)$  ist eine Funktion der reellen Varia-

blen  $\omega_x$  (Frequenz in x-Richtung) und  $\omega_y$  (Frequenz in y-Richtung).  $F(\omega_x, \omega_y)$  ist das zweidimensionale komplexe Frequenzspektrum des Bildes  $f(x, y)$ .

2 - D

<b>FT</b>	$F(\omega_x, \omega_y) = A^2 \cdot \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy$	(11)
<b>IFT</b>	$f(x, y) = B^2 \cdot \int_{\omega_y=-\infty}^{+\infty} \int_{\omega_x=-\infty}^{+\infty} F(\omega_x, \omega_y) \cdot e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$	(12)

### 4. Die Normfaktoren A und B:

In der Literatur sowie in Rechenprogrammen werden die Normfaktoren  $A$  (großes Alpha) und  $B$  (großes Beta) in den Gleichungen (9) bis (12) unterschiedlich angegeben. Das Nichtbeachten dieser Tatsache kann leicht zu falschen numerischen Ergebnissen führen. Deshalb sind im folgenden einige der jeweils verwendeten Normfaktoren tabellarisch zusammengestellt.

In ... / Bei ...	FT	IFT
• IDL 2.0 [4] • IDL 3.0 [-]	$A = 1/2\pi$	$B = 1$
• Dreszer [2] • Mallat [6]	$A = 1$	$B = 1/2\pi$
• Mathematica [5] • IDL 1.0 [-]	$A = 1/\sqrt{2\pi}$	$B = 1/\sqrt{2\pi}$

### 5. Zu den Einheiten der Phase:

In allen Gleichungen von Rotationsbewegungen (hier Drehzeiger!) werden die Winkel (hier Phasenwinkel) stets in der SI-Einheit Radiant (rad = m/m) angegeben, früher Bogenmaß genannt. Wenn  $\varphi$  der Winkel,  $l$  die Länge des von den Winkelschenkeln eingeschlossenen Kreisbogens und  $r$  der Radius ist (Abb. 3), dann gilt als Definitionsgleichung (13) und eine Um-

rechnung erfolgt nach (14).

$$\varphi = \frac{l}{r} \quad (13)$$

$$\frac{\varphi / \text{rad}}{\varphi / ^\circ} = \frac{2\pi}{360} \quad (14)$$

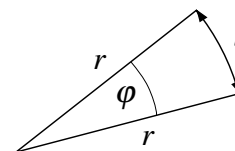


Abb. 3: Zur Definition von  $\varphi$ .

### 6. Literatur (1. Teil):

- [1] Bracewell, Ronald N.: The Fourier Transform and Its Applications. New York: Mc Graw Hill 1978 (2. Auflage). — **Hinweis:** Achtung! Die in diesem Buch durchgehend verwendete Variable  $s$  ist die Frequenz und nicht die Kreisfrequenz,  $s = \omega/2\pi$ .
- [2] Dreszer, Jerzy (Ed.): Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Zürich: Harry Deutsch 1975. ISBN: 3-87144-149. Preis: 59,80 DM.
- [3] Heuser, Harro: Funktionalanalysis – Theorie und Anwendung. Stuttgart: Teubner 1986. ISBN: 3-519-12206-5. Preis: 84,- DM.
- [4] IDL Interactive Data Language – User's Guide Version 2.0. Boulder (USA): Research Systems Inc. 1990.
- [5] Wolfram, Stephen: Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer. Redwood City (USA): Addison-Wesley 1988. ISBN: 0-201-19334-5. Preis: 98,- DM.
- [6] Mallat, Stephane G.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 11, 674–693, 1989.
- [7] Dittberner, K.-H.: Wichtige Theoreme der Signaldatenverarbeitung. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 8, 1989–1996.

Die Fortsetzung dieses 1. Teiles erscheint in den wdv-notes Nr. 34.