

Mit den „elektrischen Phänomenen“ in biologischen Systemen (z. B. Aktivität von Neuronen, EEG, EKG) sind elektromagnetische Felder verknüpft, die sich für Analysen physikalisch als *langsam veränderliche Felder* nach der Maxwell'schen Theorie (1873) beschreiben lassen.

In diesem Merkblatt sind dazu die wichtigsten grundlegenden Naturgesetze sowie deren Bedingungen, wie sie für zeitabhängige Vektorfelder gelten, in konzentrierter Form und moderner Notation zusammengestellt [1–5]. Eine Bewegung des Mediums ist hier nicht berücksichtigt.

Soweit bei den Beziehungen die Angabe eines bestimmten Koordinatensystems fehlt, beziehen sich die Angaben immer auf ein *orthogonales kartesisches Koordinatensystem* in  $\mathbf{R}^3$ . Unter dem Vakuum wird hier der leere Raum verstanden.

**1. Definition von Größen und Notation:**

$\mathbf{N}$  = Menge der natürlichen Zahlen = {1, 2, 3, ...}  
 $\pi$  = 3,141 592 654 ...  
 $j$  = Imaginäre Einheit =  $\sqrt{-1}$ ;  $j^2 = -1$ .  
 $\dots \in \dots$  = ... ist Element der Menge ...  
 $[\dots]$  = SI - Einheit der Größe ...  
 $|\dots|$  = Absoluter Betrag von ...; Länge des Vektors ...  
 $\mathbf{R}^n$  = Euklidischer Raum von  $n$  Dimensionen.  
 $\dot{x} = \partial/\partial t$  = Differentiation der Größe  $x$  nach der Zeit  $t$   
 $= j\omega x$  für sinusoidale Größen;  $\omega$  = Kreisfrequenz.  
 $k$  = Skalare Größe; Konstante.  
 $f, g = f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})$  = Skalare Funktionen des Ortes.  
 $\mathbf{r}$  = Ortsvektor =  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  in orthogonalen kartesischen Koordinaten in  $\mathbf{R}^3$ .  
 $\mathbf{v}$  = Vektor in  $\mathbf{R}^3 = [v_1, v_2, v_3]$ . Die Zahlen  $v_\zeta$  ( $\zeta \in \mathbf{N}$ ) heißen die Koordinaten des Vektors.  
 $e_\zeta$  = Einheitsvektor;  $|e_\zeta| = 1$ .  
 $k \cdot \mathbf{v}$  = Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar  
 $= [k \cdot v_1, k \cdot v_2, k \cdot v_3]$ .  
 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  = Addition von Vektoren =  $[v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$ .  
 $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle$  = Skalarprodukt zweier Vektoren (inneres Produkt)  
 $= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .  
 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  = Vektorprodukt zweier Vektoren (äußeres Produkt).  
 $= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$ .  
 $\mathbf{V}$  = Vektorfeld =  $[V_1, V_2, V_3]$  mit den Komponenten  
 $V_1 = V_1(x, y, z, t), V_2 = V_2(x, y, z, t), V_3 = V_3(x, y, z, t)$ .  
 $\nabla$  = Nabla - Operator =  $\partial/\partial \mathbf{r} = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$ .  
 $\Delta$  = Laplace - Operator (Delta - Operator).  
 $= \nabla \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

$c_0$  = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum =  $1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$   
 $= 2,997\ 924\ 58 \cdot 10^8$  m/s.  
 $\mu_0$  = Magnetische Feldkonstante im Vakuum =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m  
 $= 1,256\ 637\ 061\ 4 \cdot 10^{-6}$  H/m oder Vs/Am.  
 $\epsilon_0$  = Elektrische Feldkonstante im Vakuum =  $1/\mu_0 c_0^2$   
 $= 8,854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12}$  F/m oder As/Vm.  
 $\epsilon_r$  = Dielektrizitätszahl eines Stoffes;  $[\epsilon_r] = 1$ .  
 $\epsilon$  = Dielektrizität (Permittivität) =  $\epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ;  
 $[\epsilon] = C/m = As/Vm$ .  
 $\mu_r$  = Magnet. Permeabilitätszahl eines Stoffes;  $[\mu_r] = 1$ .  
 $\mu$  = Magnet. Permeabilität =  $\mu_0 \cdot \mu_r$ ;  $[\mu] = H/m = Vs/Am$ .  
 $Z_0$  = Wellenwiderstand des Vakuums =  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$   
 $= \mu_0 \cdot c_0 \approx 377 \Omega$ .  
 $\phi$  = Elektrisches Potential;  $[\phi] = V$ .  
 $U$  = Elektrische Spannung;  $[U] = V$ .  
 $\mathbf{E}$  = Elektrische Feldstärke;  $[E] = V/m$ .  
 $\mathbf{D}$  = Dielektrische Verschiebungsdichte (Erregung);  
 $[D] = C/m^2 = As/m^2$ .  
 $\mathbf{P}$  = Elektrische Polarisierung (Dipolmomentdichte);  
 $[P] = C/m^2 = As/m^2$ .  
 $Q$  = Elektrische Ladung;  $[Q] = C = As$ .  
 $I$  = Elektrischer Strom;  $[I] = A$ .  
 $\mathbf{S}$  = Elektrische Stromdichte;  $[S] = A/m^2$ .  
 $\mathbf{H}$  = Magnetische Feldstärke;  $[H] = A/m$ .  
 $\mathbf{B}$  = Magnetische Induktion;  $[B] = T = Wb/m^2 = Vs/m^2$ .  
 $\mathbf{M}$  = Magnetisierung (Magnetische Polarisierung);  
 $[M] = T = Wb/m^2 = Vs/m^2$ .  
 $\Phi$  = Magnetischer Fluß;  $[\Phi] = Wb = Vs$ .  
 $\rho$  = Raumladungsdichte;  $[\rho] = C/m^3 = As/m^3$ .  
 $\kappa$  = Elektrische Leitfähigkeit;  $[\kappa] = S/m = A/Vm$ .  
 $w$  = Energiedichte;  $[w] = J/m^3 = Ws/m^3 = VAs/m^3$ .  
 $\mathbf{f}$  = Lorentz - Kraftdichte =  $\rho \mathbf{E} + (\mathbf{S} \times \mathbf{B})$ ;  $[\mathbf{f}] = N/m^3$ .

**2. Differentielle Vektoroperationen:**

Der Gradient einer skalaren Ortsfunktion (Skalarfeld)  $\phi(x, y, z)$  – der Potentialfunktion – ist ein Vektorfeld:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \quad (1)$$

Der Gradient zeigt stets in Richtung des größten Anstiegs seiner Potentialfunktion. Der Absolutbetrag des Vektors  $\text{grad } \phi$  ist gleich der Ableitung der Potentialfunktion in Richtung der Normalen zu den Äquipotentialflächen:

$$|\text{grad } \phi| = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sqrt{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2} \quad (2)$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\mathbf{V}$  ist ein Skalarfeld, das eine Aussage über die Quellen im Vektorfeld  $\mathbf{V}$  macht:

$$\text{div } \mathbf{V} = \langle \nabla | \mathbf{V} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (3)$$

Ist das Vektorfeld  $\mathbf{V}$  quellenfrei, so ist  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ . Dann existiert dazu immer ein anderes quellenfreies Vektorfeld  $\mathbf{A}$ , so daß

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (4)$$

ist.  $\mathbf{A}$  ist das Vektorpotential von  $\mathbf{V}$ .

Die Rotation eines Vektorfeldes  $\mathbf{V}$  ist ein neues Vektorfeld  $\text{rot } \mathbf{V}$  nach Gleichung (6), das die punktweise Verteilung von Wirbeln im Vektorfeld  $\mathbf{V}$  angibt. Ist das Vektorfeld  $\mathbf{V}$  wirbelfrei, ist  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$  und das Vektorfeld  $\mathbf{V}$  ist ein Potentialfeld, d. h. es gilt dann:

$$\mathbf{V} = -\text{grad } \phi, \quad (5)$$

wobei  $\phi$  das skalare Potential von  $\mathbf{V}$  ist.

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left[ \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] \quad (6)$$

### 3. Die Maxwell'schen Gleichungen:

In  $\mathbf{R}^3$  mit einem orthogonalen kartesischen Koordinatensystem bedeuten  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld und  $\mathbf{H}$  das magnetische Feld, wobei  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  Vektorfunktionen sind, d. h. vom Ort und von der Zeit abhängen. Das physikalische Medium (Stoff) wird durch die drei Skalarfelder beschrieben: Elektrische Leitfähigkeit  $\kappa = \kappa(\mathbf{r}, t)$ , Dielektrizität  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$ , Magnet. Permeabilität  $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$ .

Es gelten dann im SI-Einheitensystem die *Maxwell'schen Feldgleichungen* (MFG) (7) bis (10) in der allgemeinsten Differentialform zusammen mit den Materialgleichungen (11) bis (13). Dabei sind die Quellen – d. h. die Ursachen der Felder – die Raumladungsdichte  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , die Magnetisierung  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\dot{\mathbf{M}}$  und die elektrische Polarisation  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\dot{\mathbf{P}}$ .

1. MFG:	$\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{S} + \dot{\mathbf{D}}$	(7)
2. MFG:	$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$	(8)
3. MFG:	$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(9)
4. MFG:	$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	(10)
5. MFG:	$\mathbf{S} = \kappa \cdot \mathbf{E}$	(11)
5. MFG:	$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$	(12)
5. MFG:	$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} + \mathbf{M}$	(13)
6. MFG:	$w = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}   \mathbf{D} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}   \mathbf{B} \rangle$	(14)

Die 1. MFG (7) besagt, daß die Bewegung elektrischer Ladung (auch von Ionen!) ein Magnetfeld verursacht (*Durchflutungsgesetz*). Die 2. MFG (8) besagt, daß ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ein elektrisches Feld verursacht, das nicht wirbelfrei ist (*Induktionsgesetz*).

Die 3. MFG (9) sagt aus, daß das Magnetfeld keine Quellen hat, d. h. es gibt in der Natur keine „magnetischen Ladungen“. Die 4. MFG (10) besagt, daß die im Raum vorhandenen elektrischen Ladungen die Quellen (Ursache) des dielektrischen Verschiebungsstroms sind. Die 5. MFG sind die Materialgleichungen. Und die 6. MFG beschreibt die Energiedichte der Felder. Außerdem gilt die *Kontinuitätsgleichung* (15), die sich aus (7) ableiten läßt, in der ausgesagt wird, daß die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$\text{div } \mathbf{S} = -\dot{\rho} \quad (15)$$

### 4. Langsam veränderliche Felder :

Die Feldgleichungen (7) bis (15) gelten in der Natur allgemein. Im *quasistationären Fall*, der in *biologischen Systemen* vorliegt, ändern sich die Felder zeitlich nur relativ langsam. Gegenüber dem stationären Fall  $\partial/\partial t = 0$  treten aber zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  bereits Kopplungen auf. Ein Feld gilt als quasistationär, wenn die räumliche Ausdehnung des Feldbereichs sehr viel kleiner als die Wellenlänge  $\lambda_0$  der höchsten Frequenz ist, mit der sich das Feld zeitlich ändert (300 km bei 1 kHz). Das bedeutet, es gilt folgende Bedingung:

$$\lambda_0 \gg \frac{2\pi}{Z_0} \cdot \frac{\varepsilon_r}{\kappa} \quad \text{oder} \quad |\varepsilon \dot{\mathbf{E}}| \ll |\kappa \mathbf{E}|. \quad (16)$$

Wegen der Quellenfreiheit von  $\mathbf{B}$  (9) existiert gemäß (4) ein *Vektorpotential*  $\mathbf{A}$  ( $[\mathbf{A}] = \text{Vs/m}$ ) mit  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

Mit (13) folgt:  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{M})$  (18)

Aus (8) mit (13) und (18) sowie  $\mu = \text{const}$  folgt:  $\text{rot } (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0$ . (19)

Wegen der Wirbelfreiheit von (19) existiert gemäß (5) ein *skalares Potential*  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  mit  $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\text{grad } \varphi$ . (20)

Aus (7) mit (11), (12) und (18) sowie  $\varepsilon = \text{const}$ :  $\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{M}) = \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}$ . (21)

Mit (20) unter Berücksichtigung der Bedingung (16) ergibt sich aus (21) dann der *quasistationäre Fall*:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} - \text{rot } \mathbf{M} = -\kappa \mu (\mathbf{E} + \text{grad } \varphi) + \mu \dot{\mathbf{P}}$$

Mit Theorem (54):

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \kappa \mu \text{grad } \varphi = \text{rot } \mathbf{M} + \mu \dot{\mathbf{P}}$$

Mit Theorem (31) und (34):

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{A} + \kappa \mu \varphi) - \Delta \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{M} + \mu \dot{\mathbf{P}}$$

Mit der Lorentzkonvention  $\text{div } \mathbf{A} = -\kappa \mu \varphi$  folgt: (22)

**Vektorpotential:**  $\Delta \mathbf{A} = -\text{rot } \mathbf{M} - \mu \dot{\mathbf{P}}$  (23)

Aus (10) mit (12) und (20):

$$\text{div}(-\varepsilon \dot{\mathbf{A}} - \varepsilon \text{grad } \varphi + \mathbf{P}) = \rho$$

$$-\varepsilon \text{div } \dot{\mathbf{A}} - \varepsilon \text{div grad } \varphi = \rho - \text{div } \mathbf{P}$$

Mit (22) und Theorem (30) sowie  $\kappa = \text{const}$  und  $\mu = \text{const}$ :

$$\varepsilon \kappa \mu \dot{\varphi} - \varepsilon \Delta \varphi = \rho - \text{div } \mathbf{P}$$

**Potential:**  $\Delta \varphi = \kappa \mu \dot{\varphi} - \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\text{div } \mathbf{P}}{\varepsilon}$  (24)

**Ergebnis:** Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen (7) bis (10) für den quasistationären Fall ist zurückgeführt auf die Bestimmung des Vektorpotentials  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  und des Potentials  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  aus den *Poissonschen Differentialgleichungen* (23) bzw. (24), die mit den üblichen Methoden zu lösen sind [3]. Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  berechnet sich dann aus (20), das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  nach (18).

### 5. Theoreme der Vektoranalysis:

$\text{grad } k \equiv 0$ (25)	$\text{rot}(\text{grad } f) \equiv 0$ (28)	$\text{grad } f(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \cdot \text{grad } \varphi$ (40)
$\text{div } k \equiv 0$ (26)	$\text{div}(\text{rot } \mathbf{V}) \equiv 0$ (29)	$\text{grad } f(\mathbf{r}) = \frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{ \mathbf{r} }$ (41)
$\text{rot } k \equiv 0$ (27)	$\text{div}(\text{grad } f) \equiv \Delta f$ (30)	$\text{grad } \mathbf{r} = \mathbf{r}/ \mathbf{r} $ (42)
$\text{grad}(k \cdot f) = k \cdot \text{grad } f$ (31)		$\text{grad } \ln(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/ \mathbf{r} ^2$ (43)
$\text{div}(k \cdot \mathbf{V}) = k \cdot \text{div } \mathbf{V}$ (32)		$\text{grad}(1/\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/ \mathbf{r} ^3$ (44)
$\text{rot}(k \cdot \mathbf{V}) = k \cdot \text{rot } \mathbf{V}$ (33)		$\text{div } \mathbf{r} = 3 \text{ im } \mathbf{R}^3$ (45)
$\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$ (34)		$\text{div}(\mathbf{r}/ \mathbf{r} ) = 2/ \mathbf{r} $ (46)
$\text{div}(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \text{div } \mathbf{V} + \text{div } \mathbf{W}$ (35)		$\text{div} \langle f(\mathbf{r})   \mathbf{r} \rangle = 3f(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}$ (47)
$\text{rot}(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \text{rot } \mathbf{V} + \text{rot } \mathbf{W}$ (36)		$\text{rot} \langle f(\mathbf{r})   \mathbf{r} \rangle \equiv 0$ (48)
$\text{grad}(f \cdot g) = f(\text{grad } g) + g(\text{grad } f)$ (37)		$\langle \mathbf{V}   \text{rot}(f \cdot \mathbf{V}) \rangle = \langle f \cdot \mathbf{V}   \text{rot } \mathbf{V} \rangle$ (49)
$\text{div}(f \cdot \mathbf{V}) = \langle \text{grad } f   \mathbf{V} \rangle + f \cdot \text{div } \mathbf{V}$ (38)		
$\text{rot}(f \cdot \mathbf{V}) = (\text{grad } f) \times \mathbf{V} + f \cdot \text{rot } \mathbf{V}$ (39)		
$\text{grad} \langle \mathbf{V}   \mathbf{W} \rangle = \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{W} + \mathbf{W} \times \text{rot } \mathbf{V} + (d\mathbf{V}/d\mathbf{W}) + (d\mathbf{W}/d\mathbf{V})$ (50)		
$\text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \langle \text{rot } \mathbf{V}   \mathbf{W} \rangle - \langle \mathbf{V}   \text{rot } \mathbf{W} \rangle$ (51)		
$\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{V} \cdot \text{div } \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \text{div } \mathbf{V} + (d\mathbf{V}/d\mathbf{W}) - (d\mathbf{W}/d\mathbf{V})$ (52)		
$\text{div grad}(f \cdot g) = 2(\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f$ (53)		
$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{V}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$ (54)		

➡ In dieser Tabelle sind einige wichtige Theoreme der Vektoranalysis zusammengestellt.

### 6. Literatur:

- [1] Päsler, Max: Theorie der Elektrizität. Vorlesungen an der Technischen Universität Berlin. – Ausgearbeitet von J. Behne und W. Muschik: Elektrodynamik. Berlin: Kiepert 1967.
- [2] Wolff, Ingo: Grundlagen und Anwendungen der Maxwell'schen Theorie I. BI Hochschultaschenbücher Nr. 818/818a. Mannheim: Bibliographisches Institut 1968.
- [3] Dreszer, Jerzy (Ed.): Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Zürich: Harry Deutsch 1975. ISBN: 3-87144-149. Preis: 59,80 DM.
- [4] Meschkowski, Herbert: Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher Nr. 99/99a. Mannheim: Bibliographisches Institut (2. Auflage) 1966.
- [5] Simonyi, Károly: Theoretische Elektrotechnik. Berlin: VEB Wissenschaften (9. Auflage) 1989. ISBN: 3-326-00045-6. Preis: 69,- DM.

Dieses Merkblatt wurde auf einem MAC-II vollständig mit den Programmen Aldus PageMaker 4.0.1 und MathType 2.11 angefertigt.