

Eine moderne Ergänzung oder eine Alternative zur klassischen Fourier Analyse von Signalen kann das seit 1982 durch Grossmann und Morlet [2] entwickelte Konzept der Wavelets sein. Eines der Hauptziele der mathematischen Entwicklung der Wavelet Funktionaltransformation(en) war, eine neue Methode zur leicht interpretierbaren visuellen Darstellung von Signalen und deren Eigenschaften bereitzustellen.

Durch die Wavelet Transformationen werden eindimensionale Signale  $s(t)$  in eine zweidimensionale Abbildung transformiert, in der strukturelle Eigenschaften von  $s(t)$  besonders deutlich zu erkennen sind. Die Wavelet Transformationen (WT) können als ein mathematisches Mikroskop für Signale angesehen werden, mit dem man im „Zeitbereich“ von Signalen unsichtbare Eigenschaften „entdecken“ kann.

Gegenüber der Fourier Transformation besitzen die Wavelet Transformationen – bei geeigneter Wahl der Wavelet Funktion [7] – sehr gute Lokalisierungseigenschaften, sowohl im „Zeitbereich“ bzw. „Raumbereich“ als auch im „Frequenzbereich“, dem Fourierbereich. Ein Aliasing-Problem existiert nicht. Es wird keine Periodizität der Signale verlangt.

Die Wavelet Transformationen werden bereits in verschiedenen Wissenschaftsbereichen mit großem Erfolg eingesetzt. Zwar ist die Anwendung in der biologischen Grundlagenforschung noch sehr spärlich, da die verfügbare Literatur doch sehr mathematisch orientiert ist. Dennoch wird gerade für Biologen und Physiologen, die biologische Signale untersuchen, die Methode der Wavelets in einigen Jahren zu den Standardwerkzeugen der täglichen Forschungsarbeit gehören, denn die klare Aussagefähigkeit der WT-Darstellungen (natürliche Zeit-Frequenzdarstellung) ist zu bestechend. Außerdem gibt es erste Anhaltspunkte dafür, daß in biologischen Systemen selbst, z. B. beim Sehen und Hören, aber auch bei der zentralen Kreislaufregulation, so etwas wie eine „Wavelet Analyse“ eine Rolle spielen könnte.

Die Entwicklung der Wavelet Transformationen ist eng verknüpft mit dem großen Fortschritt in der Computertechnologie, denn der Rechenaufwand und Speicherbedarf – verglichen mit der klassischen FFT (Fast Fourier Transform) – ist erheblich. Kleine PC's – vor allem ohne virtuelle Speicherverwaltung (MS-

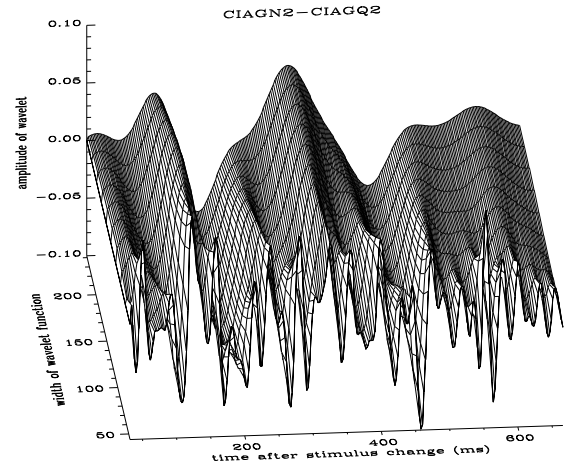


Abb.1: Beispiel einer auf dem HAIRcluster berechneten Wavelet Transformation eines Signals. Aus [10].

DOS!) – können das (noch) nicht leisten; es sei denn, man installiert auf dem PC ein leistungsfähiges Unix-Betriebssystem.

Im folgenden ist ein Überblick der Definitionen der eindimensionalen Wavelet Transformationen sowie deren Bedeutung in der Signaldatenverarbeitung zusammengestellt. Dabei wird die Kenntnis der Merkblätter wdv-notes Nr. 8 und wdv-notes Nr. 33 über die Fourier Transformation [5, 6] vorausgesetzt. Auch für zweidimensionale Signale (Bilder) lassen sich Wavelet Transformationen angeben [4].

### 1. Definition von Größen und Notation:

Alle Definitionen, die in den wdv-notes Nr. 33 angegeben sind [6], gelten auch hier.

- $\mathbf{R}^n$  = Euklidischer Raum von  $n$  Dimensionen.
- $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$  = Hilbert Raum, ein Sonderfall eines Banachraumes. Menge der meßbaren, quadratintegrablen  $n$ -dimensionalen Funktionen.
- $\mathbf{l}^2$  = Hilbertscher Folgenraum. Menge der Folgen  $s = (a_n)$  komplexer (und reeller) Zahlen für die  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$  ist, also konvergieren.
- $f(x)$  = Komplexe Funktion  $f_1(x) + j f_2(x)$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ .
- $\bar{f}(x)$  = Zu  $f(x)$  konjugiert komplexe Funktion  $= f_1(x) - j f_2(x)$ .
- $\langle f | g \rangle$  = Skalarprodukt der komplexen Funktionen  $f$  und  $g$   
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \bar{g}(x) dx$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ .
- $f * g$  = Faltung (convolution) der Funktionen  $f$  und  $g$   
 $= \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \bar{g}(x-u) du$  mit  $(-\infty < x < +\infty)$ .

- $s(t)$  = Signalfunktion der kontinuierlichen Variablen  $t$ , der Zeit;  $s(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ ,  $\int |s(t)|^2 dt < \infty$ .
- $s[n] = s(n \Delta t)$  = Folge der von  $s(t)$  im Abstand  $\Delta t$  abgetasteten Werte;  $n = t/\Delta t$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .  
 $1/\Delta t$  ist die Abtastfrequenz  $f_s$  (sample rate).
- $\psi(t)$  = Analysierendes (Basis-)Wavelet;  $\psi \in \mathbf{C}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
- $\bar{\psi}(t)$  = Konjugiert komplexe Funktion zu  $\psi(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
- $\Psi(\omega)$  = Fourier Transformation des Wavelets  $\psi(t)$ .
- $a$  = Wavelet Parameter für die Skalierung (dilation),  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ;  $1/a$  ist die Vergrößerung.
- $b$  = Wavelet Parameter für die (zeitliche) Verschiebung (translation),  $b \in \mathbf{R}$ .
- $W(b, a)$  = Wavelet Transformation des Signals  $s(t)$ ;  $W \in \mathbf{C}$ , eine zweidimensionale komplexe (!) Funktion.

### 2. Das analysierende Wavelet:

Wenn die Wavelet Transformation einem mathematischen Mikroskop gleichen soll, dann muß dieses „Mikroskop“ mit einem „Objektiv“ ausgestattet sein. Diese Rolle spielt das analysierende Wavelet, auch Basis-Wavelet genannt, einer Funktion  $\psi(t)$ , die (mindestens) folgenden acht Bedingungen genügen muß:

1.  $\psi(t)$  muß quadratisch integrierbar sein. (1)
2.  $\psi(t)$  muß eine endliche Energie besitzen, d. h.  $\psi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ . Für z. B.  $\psi(t) = 1$  gilt das nicht! (2)
3. Es muß  $c_\psi = 2\pi \cdot \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$  sein. (3)

Das bedeutet, daß

4.  $\int_{t=-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$  ist;  $\psi(t)$  muß also den Mittelwert Null haben und darf also keine Gleichkomponente (dc component) besitzen. (4)

Die Bedingungen (1) bis (4) besagen, daß das Wavelet  $\psi(t)$  wie eine kurze Welle oszillieren muß. Daher stammt auch der Name: Wavelet = „Wellchen“.

5. Die Fourier Transformation  $\Psi(\omega)$  des Wavelets  $\psi(t)$  muß differenzierbar sein, woraus folgt (5)
6.  $\Psi(\omega = 0) = 0$ ,  $\Psi(\pm \infty) = 0$ . (6)

Des weiteren muß gelten:

7.  $\Psi(\omega) = 0$  für  $\omega < 0$  (7)
8.  $\Psi(\omega) \in \mathbf{R}$  für  $\omega > 0$  (8)

Wie bei einem Mikroskop muß die Vergrößerung des Objektivs – hier des Signals  $s(t)$  – und die Position einstellbar sein. Dieses wird dadurch erreicht, daß aus dem analysierenden Wavelet  $\psi(t)$  durch Skalierung und Verschiebung ein ganzer Satz von Wavelets  $\psi_{b,a}(t)$  erzeugt wird mit

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{mit } (b,a) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+. \quad (9)$$

Dabei bestimmt der Wavelet-Parameter  $b$  die Position (zeitliche Verschiebung). Der Faktor  $1/a$  entspricht der Vergrößerung (Spreizung).

Das Ergebnis der Wavelet Transformation hängt von der Wahl eines geeigneten analysierenden Wavelets  $\psi(t)$  ab [1]. Es ist dabei essentiell  $\psi(t)$  so zu wählen, daß dazu im Hilbert Raum  $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$  – dem Raum der meßbaren, quadratintegrierbaren, eindimensionalen Funktionen  $f(t)$  mit endlicher Energie – eine orthonormale Basis existiert. (10)

### 3. Die kontinuierlichen Wavelet Transformationen (WT):

Die allgemeine Form einer Wavelet Transformation  $W(b, a)$  eines Signals  $s(t)$  in Bezug zum analysierenden Wavelet  $\psi(t)$  ist nach Morlet [2] definiert durch:

$$\text{WT} \quad W(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (11)$$

mit  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ .

Die Wavelet Parameter  $a$  und  $b$  werden entweder kontinuierlich variierend oder diskret gewählt mit

$$a = a_0^m, \quad b = n b_0 a_0^m \quad (12)$$

mit  $m, n \in \mathbf{Z}$  und  $a_0 > 1$ ,  $b_0 = \text{const} > 0$ .

Die Definitionsgleichung (11) entspricht dem Skalarprodukt (inneres Produkt) aus der Signalfunktion  $s(t)$  und der Waveletfunktion  $\psi((t-b)/a)$  im Hilbert Raum  $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ :

$$W(b, a) = \left\langle s(t) \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right. \right\rangle. \quad (13)$$

Die Definitionsgleichung (11) kann mit Ausdrücken der Fourier Transformation umgeschrieben werden in:

$$\text{WT} \quad W(b, a) = \sqrt{a} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot \bar{\psi}(a\omega) \cdot e^{jb\omega} d\omega \quad (14)$$

mit  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$

Dabei ist die Fourier Transformation des Signals  $s(t)$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{Vgl. (9) in [6]}$$

Der Ausdruck  $e^{jb\omega}$  in (14) beschreibt die Verschiebung im „Zeitbereich“. Aufgrund der Gleichungen (13) und (14) läßt sich die Wavelet Transformation als eine Analyse des Signals  $s(t)$  mit den Bandpaß-Filtern  $\Psi(a\omega)$  konstanter relativer (!) Frequenzauflösung ( $\Delta\omega/\omega = \text{const}$ ) interpretieren. Dieses ist gegenüber der (üblichen) „windowed“ Fourier Transformation ( $\Delta\omega = \text{const}$ ) ein erheblicher Vorteil. Die Wavelet Transformation hat für höherfrequente Komponenten eines Signals  $s(t)$  eine wesentlich bessere Auflösung im „Zeitbereich“.

### 4. Die kontinuierliche Inverse Wavelet Transformation (IWT):

Sind die unter Punkt 2 genannten acht Bedingungen alle erfüllt, hat das Signal  $s(t)$  also nur eine endliche Energie, dann gehen bei einer WT keine Informationen des Signals  $s(t)$  verloren, und die Wavelet Transformation ist eindeutig umkehrbar, d. h. aus  $W(b, a)$  läßt sich das Signal  $s(t)$  wieder rekonstruieren [3], wobei  $c_\psi$  durch die Gleichung (3) bestimmt ist:

$$\text{IWT} \quad s(t) = \frac{1}{c_\psi} \frac{1}{a^{5/2}} \iint W(b, a) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db da. \quad (15)$$

### 5. Zur Darstellung einer Wavelet Transformation:

Wie bereits aus der Gleichung (14) ersichtlich, ist die Wavelet Transformation  $W(b, a)$  eines Signals  $s(t)$  eine zweidimensionale komplexe Funktion  $W$  der Variablen  $b$  und  $a$ , deren Betrag und Phase sich grafisch z. B. in einer 3D-Darstellung abbilden lassen.

Daneben hat sich in der Praxis eine andere Art der Darstellung, die weniger aufwendig ist, durchgesetzt. Dieses ist die Darstellung von  $W(b, a)$  als sogenanntes Intensitätsbild (Graustufenbild). Solche Bilder lassen sich heute recht bequem und einfach mit Laserdruckern erzeugen, die mit der Adobe *POSTSCRIPT*-Sprache [9] angesteuert werden können.

### 6. Literatur (1. Teil):

- [1] Combes, J. M. et al. (Eds.): Wavelets – Time-Frequency Methods and Phase Space. Berlin: Springer 1990 (2. Auflage). ISBN: 3-540-53014-2.
- [2] Grossmann, A. and J. Morlet: Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. SIAM J. Mathem. Vol. 15, 723–736, 1984.
- [3] Streit, L. (Ed.): Mathematics and Physics – Lectures on Recent Results. Singapore: World Scientific 1987.
- [4] Mallat, St. G.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 11, 674–693, 1989.
- [5] Dittberner, K.-H.: Wichtige Theoreme der Signaldatenverarbeitung. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 8, 1989–1993.
- [6] Dittberner, K.-H.: Die Fourier-Transformation in der Signaldatenverarbeitung – Teil 1. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 33, 1990–1993.
- [7] Dittberner, K.-H.: Typische Wavelets in der Signaldatenverarbeitung. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 91, 1990–1992.
- [8] Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher Nr. 99/99a. Mannheim: Bibliographisches Institut 1966 (2. Auflage).
- [9] Adobe Systems Inc.: PostScript Language – Reference Manual. Reading (USA): Addison-Wesley 1986 (5. Auflage). ISBN: 0-201-10174-2. Preis: 78,- DM.
- [10] Przybyszewski, A. W. and O.-J. Grüsser: Wavelet Method as the New Approach to Analysis of Evoked Potentials in the Electroencephalogram. ENA-Proceedings, New Orleans, 1991.

Die Fortsetzung dieses 1. Teiles erscheint in den wdv-notes Nr. 90.