

In der Natur treten in vielen Bereichen unvorhersehbare, aber durchaus wiederkehrende, bislang nur unvollkommen beschreibbare Unregelmäßigkeiten auf. Hierzu gehören zum Beispiel die Turbulenz in Fluidströmungen und die instabilen nichtlinearen dynamischen Systeme (z. B. das Wetter).

Obwohl die Mathematik seit fast 100 Jahren in der Lage war, solche Phänomene zu beschreiben und damit einer deterministischen Betrachtungsweise zuzuführen, wurde erst vor 15 Jahren von dem Mathe-

matiker Mandelbrot das Tor geöffnet und die Theorie der fraktalen Natur begründet [1]. Das ist schon sehr erstaunlich! –

Auch in Lebewesen (lebende Systeme) treten solche mathematisch beschreibbaren Unregelmäßigkeiten (Fraktale) in vielen Teilsystemen auf. Beispiele dafür sind die Informationsübertragung, die Informationsverarbeitung im Nervensystem (hier oft noch schlichtweg als „Rauschen“ (noise) abgetan), die Strömung in Gefäßsystemen, die Selbstorganisation in Neuronen-Pools.

Mit diesem Merkblatt wird ein erster Einblick in die Fraktale Natur – insbesondere der fraktalen Dimensionen der Natur –, wie er im Zusammenhang mit der Signal-datenverarbeitung bedeutsam ist, gegeben.

Erst mit neueren Methoden der Signal-datenverarbeitung wird es möglich sein, die wahre (fraktale) Natur auch bei biologischen Systemen zu untersuchen und zu erkennen (siehe z. B. wdv-notes Nr. 148 und Nr. 176).

1. Definition von Größen und Notation:

- L = Länge.
- ε = Eichlänge; $[\varepsilon] = m = \text{Meter}$.
- A = Fläche.
- V = Volumen.
- L = Länge in Dimensionsangaben.
- M = Masse in Dimensionsangaben.
- T = Zeit in Dimensionsangaben.
- $[...]$ = SI – Einheit von ...
- $\dots \in \dots = \dots$ ist Element der Menge ...

- \mathbf{N} = Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbf{Q} = Menge der rationalen Zahlen x/y mit $(x, y) \in \mathbf{N}$.
- \mathbf{R}^E = Euklidischer Raum mit E Dimensionen.
- E = Euklidische (oder kartesische) Dimension.
- D = Fraktale Dimension nach Mandelbrot; entspricht der Hausdorff - Dimension [4].
- K = Kodimension = $E - D$.
- D_T = Topologische Dimension.
- f = Fraktaler Zusatz = $D - E + 1$ (Hier erstmals definiert!).
- $\text{Nr}(A > a)$ = Anzahl der Objekte deren Größe A ein a übersteigt.

2. Die Zerlegung der Dimensionen des Raums:

Ein räumliches Objekt besitzt (in \mathbf{R}^3) drei Dimensionen, die man in die Dimensionen der Fläche und Länge zerlegen kann. Bei einem Quader zum Beispiel ist das *Breite* \times *Tiefe* = *Grundfläche* sowie *Grundfläche* \times *Höhe* = *Volumen*. Für die Einheit des Volumens, ausgedrückt in der SI-Einheit Meter (m), gilt also

$$[V] = m^2 \times m^1 = m^1 \times m^1 \times m^1 = m^{1+1+1} = m^3 \quad (1)$$

Ist diese Zerlegung der Dimension des Volumens $E = 3$ in $E = 2 + 1$ oder $E = 1 + 1 + 1$ (*Breite* \times *Tiefe* \times *Höhe*) die einzige natürliche Möglichkeit?

Seit Mandelbrot [1, 2, 3] wissen wir, daß die klassische Zerlegung nach (1) nur eine Grenzsituation (eine Idealisierung) darstellt. In der Natur stellen vielmehr die vielfältigen anderen Zerlegungen die Regel dar (*fraktale Dimensionen der Natur*). Die Tabelle auf Seite 2 gibt mit den Gl. (2) – (7) eine Übersicht über die möglichen Dimensions-zerlegungen. Eine Möglichkeit ist z. B.:

$$[V] = m^{\frac{3}{2}} \times m^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = m^3 \quad (8)$$

Ein Objekt mit einer gebrochenen (fraktalen) Dimension $D \leq 2$ ist eine *fraktale Kurve*. Sie ist bzgl. ihrer Dimension zwischen einer „normalen“ eindimensionalen Kurve ($D = 1$) und einer Fläche ($D = 2$) angesiedelt. Eine typische fraktale Kurve ist in der Abb. 1 dargestellt. Ein Objekt mit einer fraktalen Dimension $2 < D < 3$ ist eine *fraktale Fläche*.

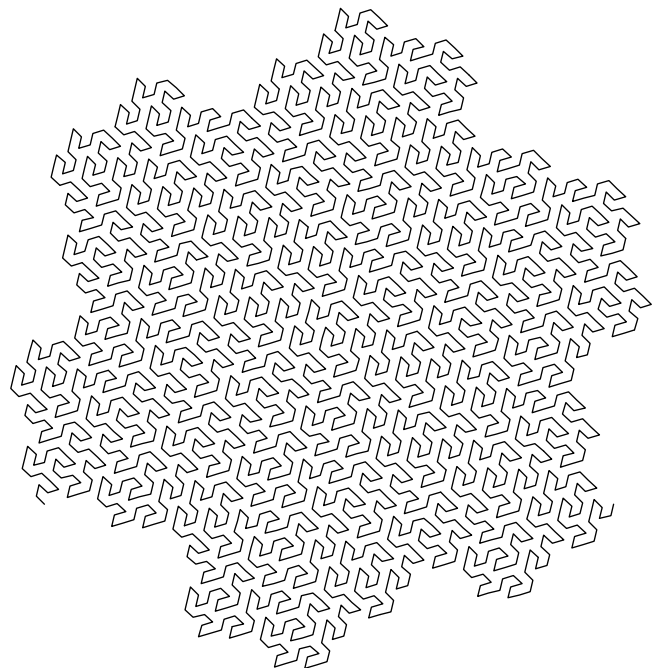


Abb. 1: Die »Flowsnake« – Beispiel einer fraktalen Kurve vom Peano-Typ, die mit 4 Iterationen erzeugt wurde. Die fraktale Dimension dieser Kurve ist $D = 1,4248$. Berechnung und Darstellung erfolgte mit Mathematica V 2.0 [6] auf einem MAC Quadra-700.

3. Die fraktale Länge-Fläche-Relation:

Für die Länge einer skaleninvarianten, fraktalen Kurve (z. B. Küstenlinie, Koch-Kurven, Peano-Kurven) gilt:

$$L(\varepsilon) = n \cdot \varepsilon = \text{Anzahl} \times \text{Eichlänge} \quad (9)$$

Die Anzahl n wurde mit $n = \lambda \cdot \varepsilon^{-D}$ von Richardson bereits 1961 festgestellt [5]. Damit ergibt sich für die gesamte Länge einer fraktalen Kurve

$$L(\varepsilon) = \lambda \cdot \varepsilon^{-D} \cdot \varepsilon = \lambda \cdot \varepsilon^{1-D}. \quad (10)$$

D ist die fraktale Dimension. Mit dem Flächeninhalt A der durch die fraktale Kurve begrenzte Fläche ergibt sich nach Mandelbrot [3] bei Skaleninvarianz der konstante Quotient

$$\frac{L(\varepsilon)^{1/D}}{A(\varepsilon)^{1/2}} = \text{const.} \quad (11)$$

Sind für zwei ähnliche Objekte L und A ermittelt, so läßt sich aus der Länge-Fläche-Relation (11) die fraktale Dimension des Objekts abschätzen mit

Zerlegungen der Dimensionen des Raums				Fraktaler Zusatz		
$m = \text{Meter}, E = \text{Euklidische Dimension}, D = \text{Fraktale Dimension}$						
Dim. von \mathbb{R}^E	m^E	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{E-1+f} \\ m^D \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^{E-D} \end{matrix} \right\}$	$f = D - E + 1$ (2)
$E = 3$	Volumen	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{2+f} \\ m^D \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^{3-D} \end{matrix} \right\}$	$f = D - 2$ (3)
	m^3					
$E = 2$	Fläche	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{1+f} \\ m^D \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^{2-D} \end{matrix} \right\}$	$f = D - 1$ (4)
	m^2					
$E = 2$	Fraktale Fläche	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{1+f} \\ m^D \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^1 \\ m^1 \end{matrix} \right\}$	$f = D - 1$ (5)
	m^{2+f} $= m^{1+D}$					
$E = 3$	Volumen	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{2+f} \\ m^2 \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^1 \end{matrix} \right\}$	Die klassische Geometrie! (6)
	m^3					
$E = 2$	Fläche	=	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^1 \end{matrix} \right\}$	\times	$\left\{ \begin{matrix} m^{1-f} \\ m^1 \end{matrix} \right\}$	$f = 0$ (7)
	m^2					

$$\frac{L_1^{1/D}}{A_1^{1/2}} = \frac{L_2^{1/D}}{A_2^{1/2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{L_1^{1/D}}{L_2^{1/D}} = \frac{A_1^{1/2}}{A_2^{1/2}} \quad (12)$$

$$\frac{1}{D}(\log L_1 - \log L_2) = \frac{1}{2}(\log A_1 - \log A_2) \quad (13)$$

$$D = 2 \cdot \frac{\log L_1 - \log L_2}{\log A_1 - \log A_2} \quad (14)$$

6. Die fraktale Differentiation:

Das Kalkül der Differentiation läßt sich auf Größen mit fraktaler Dimension ausdehnen, was im Prinzip schon Leibniz bekannt war. Gegeben sei die Funktion $y = x^n$, dann ist die *fraktale Differentiation* definiert durch:

$$\frac{dy}{dx^D} = n \cdot x^{n-D} \quad (19)$$

4. Die fraktale Fläche-Volumen-Relation:

Verallgemeinert man die Länge-Fläche-Relation (11) auf räumliche Gebiete, die durch fraktale Flächen (z. B. biologische Membranen) begrenzt sind, ergibt sich nach Mandelbrot [3 – Seite 124] bei Skaleninvarianz der Objekte die Beziehung

$$\frac{F(\varepsilon)^{1/D}}{V(\varepsilon)^{1/3}} = \text{const.} \quad (15)$$

Sind die Volumina V und die fraktalen Flächeninhalte F für zwei sich ähnliche Objekte ermittelt, gilt für die Abschätzung der fraktalen Dimension D der fraktalen Fläche:

$$\frac{F_1^{1/D}}{V_1^{1/3}} = \frac{F_2^{1/D}}{V_2^{1/3}} \quad (16)$$

$$D = 3 \cdot \frac{\log F_1 - \log F_2}{\log V_1 - \log V_2} \quad (17)$$

7. Die fraktale Integration:

Die *fraktale Integration* der Funktion $y = x^n$ ist definiert durch:

$$z = \int x^n \cdot dx^D = \frac{x^{n+D}}{n+D} \quad (20)$$

8. Fraktale Ereignisse:

Fraktale mit $D < 1$, z. B. die bereits 1883 beschriebene Cantor-Menge, lassen sich als eine fraktale Folge von Ereignissen deuten [3]. Die Anzahl der Abstände zwischen den Ereignissen, deren Länge U größer als ein u ist, wird durch das Gesetz von Korcak (1938) beschrieben:

$$\text{Nr}(U > u) = n \cdot u^{-D} \quad \text{mit } n = \text{const.} \quad (21)$$

Solche fraktalen Gesetze könnten beim Encoding-Prozeß biologischer Rezeptoren eine wichtige Rolle spielen.

5. Die fraktale Masse-Volumen-Relation:

Die Masse M eines Objekts mit gleichmäßiger Dichte ρ ist $M(r) \approx \rho \cdot r^E$.

Für eine Kugel z. B. gilt $M(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3$. Dieses kann auf fraktale Dimensionen erweitert werden. Für selbstähnliche Fraktale gilt

$$M(r) \approx r^D \quad (18)$$

Der Quotient $M(r)/r^D$ ist unabhängig vom Radius ρ und kann daher zur Definition einer Dichte ρ dienen.

9. Literatur:

- [1] Mandelbrot, Benoît: Fractals: Form, Chance, and Dimension. New York: Freeman 1977.
- [2] Mandelbrot, B.: The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman 1982.
- [3] Mandelbrot, Benoît: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel: Birkhäuser 1991 (Sonderausgabe). ISBN: 3-7643-2646-8. Preis: 49,80 DM. – [BU 753].
- [4] Hausdorff, F.: Dimension und äußeres Maß. Mathematische Annalen 79, 157-179 (1919).
- [5] Richardson, L. F.: The problem of contiguity: An appendix of statistics of deadly quarrels. General Systems Soc. Yearbook 6, 139-187 (1961).
- [6] Wolfram, St.: Mathematica – Version 2.0. Champaign (USA): Wolfram Research Inc. (1991).