

In den wdv-notes Nr. 57 wurde die 1982 durch Grossmann und Morlet [1] entwickelte neue Methode der Wavelet-Transformation zur leicht interpretierbaren visuellen Darstellung von Signalen und deren Eigenschaften vorgestellt [2].

Durch Wavelet-Transformationen werden eindimensionale Signale  $s(t)$  in eine zweidimensionale Abbildung transformiert, in der die strukturellen Eigenschaften von  $s(t)$  besonders deutlich zu erkennen sind.

In diesem 2. Teil wird auf die praktische Realisierung einer Wavelet-Transformation (WT) sowie auf die Darstellungsmöglichkeiten der Ergebnisse eingegangen. Alle Definitionen und Notationen, die im ersten Teil [2] angegeben sind, gelten weiterhin.

Nicht dargestellt sind hier Algorithmen von „Fast Wavelet Transforms“ (FWT), die sich aus den Formeln der DWT entwickeln lassen.

**7. Die diskrete Wavelet-Transformation (DWT):**

Für die Praxis – der Programmierung der Wavelet-Transformation auf einem Computer – muß die Definitionsgleichung der kontinuierlichen WT (11) in [2]

$$W(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

mit  $a, b \in \mathbf{R}, a > 0.$  (16)

durch eine diskrete Beschreibung ersetzt werden, denn das Signal  $s(t)$  liegt als Abtastung  $s[n]$ , einer Folge von Werten im Raum  $\mathbf{I}^2$  vor, sowie ein geeignetes Wavelet  $\psi(t)$  [3] mit  $t = n \Delta t$  und  $b = k \Delta t$  ausgewählt werden.

**DWT**

$$W(k \Delta t, a) = \frac{\Delta t}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \bar{\psi}\left(\frac{(n-k)\Delta t}{a}\right)$$

mit  $a \in \mathbf{R}^+, n, k \in \mathbf{Z}$

(17)

Der Wavelet-Parameter  $a$  (dilation) wird dabei diskret variierend gewählt mit:

$$a = a_0^m, \quad \text{mit } m \in \mathbf{Z} \text{ und } a_0 > 1, a_0 = \text{const.} \quad (18)$$

Im Raum  $\mathbf{I}^2$  kann die Gl. (17) auch als Skalarprodukt aus dem abgetasteten Signal  $s[n]$  und dem abgetasteten Wavelet gedeutet werden:

$$W(k \Delta t, a) = \left\langle s[n] \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{(n-k)\Delta t}{a}\right) \right. \right\rangle \quad (19)$$

**8. Die Darstellung der Wavelet-Transformation:**

Auch für die komplexe Wavelet-Transformation gilt:

$$W(b, a) = |W(b, a)| \cdot e^{j\varphi(b, a)} \quad \text{mit } (0 \leq \varphi(b, a) < 2\pi) \quad (20)$$

Liegt die Berechnung von  $W(b, a)$  vor, so läßt sich aus dem Real- und Imaginärteil von  $W(b, a)$  der Betrag (modulus)

$$|W(b, a)| = \sqrt{\text{Re}\{W(b, a)\}^2 + \text{Im}\{W(b, a)\}^2} \quad (21)$$

und die Phase

$$\varphi(b, a) = \arctan \frac{\text{Re}\{W(b, a)\}}{\text{Im}\{W(b, a)\}} \quad (22)$$

der Wavelet-Transformation berechnen.

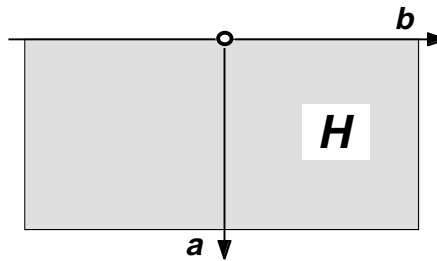


Abb. 1: Darstellungshalbebene  $H$  einer Wavelet-Transformation. Der Parameter  $b$  entspricht der Zeit und  $1/a$  stellt die Vergrößerung dar.

Es ist nun üblich, den Betrag von  $W(b, a)$  als ein Intensitätsbild, z. B. als Graustufen- oder Farbbild mit der modernen PostScript-Technologie [4], darzustellen. Beispiele für solche Darstellungen sind u. a. in [2] und [6] zu finden.

Die Wavelet-Transformation (16) definiert eine  $\{b, a\}$ -Halbebene  $H$  ( $a, b \in \mathbf{R}, a > 0$ ) bzw. bei einer Zeitfunktion  $s(t)$  eine „Zeit und Vergrößerungs“-Halbebene. Da kleine  $a$  mit „hohen Frequenzen“ bzw. hohen Vergrößerungen korrespondieren, ist es sinnvoll die  $a$ -Achse nach unten aufzutragen, so daß sich die hohen Frequenzanteile im oberen Teil abbilden (Abb. 1). Ist der Variationsbereich von  $a$  sehr groß, dann wählt man zur Darstellung die logarithmische Halbebene  $\{b, -\log(a)\}$ .

Einer der Vorzüge der Wavelet-Transformation ist die leicht interpretierbare grafische Darstellung der Signale. Dennoch bedarf es gegenüber der Fourier-Transformation einer gewissen (mentalen) Umstellung, um die Darstellungen einwandfrei interpretieren zu können. Die Publikation „Reading and Understanding Continuous Wavelet Transforms“ von Grossmann u. a. [5] gibt hierzu mit vielen Beispielen eine Hilfestellung sowie Anregungen für eine Verfeinerung der Darstellung einer Wavelet-Transformation.

**9. Literatur (2. Teil):**

- [1] Grossmann, A. and J. Morlet: Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. SIAM J. Mathem. Vol. 15, 723–736, 1984.
- [2] Dittberner, K.-H.: Die Wavelet-Transformationen in der Signal­daten­verarbeitung – Teil 1. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 57, 1990–1992.
- [3] Dittberner, K.-H.: Typische Wavelets in der Signal­daten­verarbeitung. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 91, 1990–1992.
- [4] Adobe Systems, Inc.: PostScript Language – Reference Manual. Reading (USA): Addison-Wesley 1986 (5. Auflage). ISBN: 0-201-10174-2. Preis: 78,- DM.
- [5] Grossmann, A., R. Kronland-Martinet, and J. Morlet: Reading and Understanding Continuous Wavelet Transforms. In: Wavelets–Time-Frequency Methods and Phase Space. Berlin: Springer 1990 (2. Auflage), 2–20.
- [6] Dittberner, K.-H.: The Wavelet Method Applied to the Analysis of Evoked Potentials. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 192, 1992–1993.

**Notizen:**