

Bei dem natürlichen Werkzeug der Wavelet Transformation [1, 2] hat die Wavelet-Funktion – das analysierende Wavelet („Wellchen“) – eine zentrale Bedeutung [11]. Diese Funktion muß bestimmten Bedingungen genügen.

In diesem Merkblatt sind für praktische Anwendungen der Wavelet Transformation (WT) aus der Literatur besonders häufig verwendete Wavelets mit einigen wichtigen Eigenschaften zusammengestellt. Zur Notation siehe [3].

formation (WT) aus der Literatur besonders häufig verwendete Wavelets mit einigen wichtigen Eigenschaften zusammengestellt. Zur Notation siehe [3].

1. Die Bedingungen für das (analysierende) Wavelet:

Die Wavelet Transformation gleicht einem mathematischen Mikroskop. Das „Objektiv“ dieses Mikroskops stellt das analysierende Wavelet, auch Basis-Wavelet genannt, dar. Diese Wavelet-Funktion $\psi(t)$ muß (mindestens) den folgenden acht Bedingungen genügen:

1. $\psi(t)$ muß quadratisch integrierbar sein. (1)
2. $\psi(t)$ muß eine endliche Energie besitzen, d. h. $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$. Für z. B. $\psi(t) = 1$ gilt das nicht! (2)
3. Es muß $c_\psi = 2\pi \cdot \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ sein. (3)
4. Das bedeutet, daß $\int_{t=-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ ist; (4)

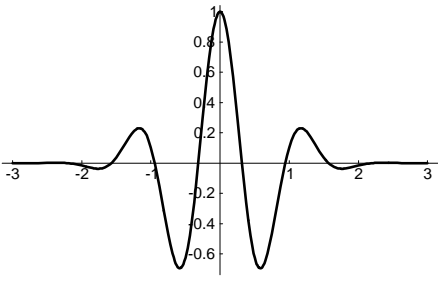
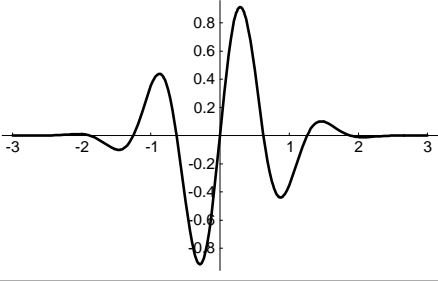
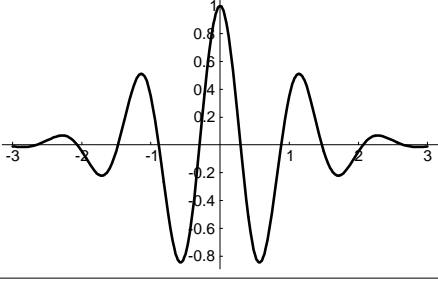
$\psi(t)$ muß also den Mittelwert Null haben, darf also keine Gleichkomponente (dc component) besitzen!

5. Die Fourier Transformation $\Psi(\omega)$ des Wavelets $\psi(t)$ muß differenzierbar sein, woraus folgt (5)
6. $\Psi(\omega = 0) = 0, \Psi(\pm\infty) = 0$. (6)
- Des weiteren muß für die Fouriertransformierte von $\psi(t)$ gelten:
7. $\Psi(\omega) = 0$ für $\omega < 0$. (7)
8. $\Psi(\omega) \in \mathbf{R}$ für $\omega > 0$. (8)

Im Prinzip besagen diese Bedingungen, daß das Wavelet $\psi(t)$ wie eine kurze „Welle“ oszillieren muß und nur eine endliche Energie besitzen darf.

2. Typische Wavelet-Funktionen:

Nr.	Wavelet	Plot des Wavelets	Anmerkungen
1	Negative 1. Ableitung der Gauß-Funktion mit $\sigma = \sqrt{1/2}$ und $m = 0$: $\psi(t) = e^{-t^2} \cdot t$		Die meisten Wavelets basieren bisher (Ausnahme: Wavelet 8) auf der Gauß-Funktion, da diese das kleinste Zeit-Bandbreitenprodukt aufweist [9, 10]. Da dieses Wavelet zwar den Bedingungen genügt, aber nicht ideal (Oszillation!), wird es nur für besondere Aufgaben verwendet. Dieses Wavelet kann mit der IDL-Prozedur WAVELET.PRO (P 476/38) berechnet werden (Keyword: /GAUSS1).
2	Negative 2. Ableitung der Gauß-Funktion mit $\sigma = \sqrt{1/2}$ und $m = 0$: $\psi(t) = e^{-t^2} \cdot (1 - 2t^2)$		Dieses Wavelet besitzt aufgrund der 2. Ableitung bereits drei Abschnitte der Oszillation. Es ist praktisch das einfachste eindimensionale Convolutions-Filter. Das Wavelet wird auch „Mexican Hat“ genannt.
3	Negative 2. Ableitung der Gauß-Funktion mit $\sigma = 1$ und $m = 0$: $\psi(t) = e^{-t^2/2} \cdot (1 - t^2)$		Dieses Wavelet eignet sich u. a. zum Studium der strukturellen Eigenschaften fraktaler Objekte, wie sie in der Natur allorts vorkommen. „The full complexity of the self-similar properties of a fractal measure can be captured by simple visual inspection of its Wavelet Transform.“ [8]. Dieses Wavelet kann mit der IDL-Prozedur WAVELET.PRO (P 476/38) berechnet werden (Keyword: /GAUSS2).
4	2. Ableitung der Gauß-Funktion mit $\sigma = 1$ und $m = 0$: $\psi(t) = e^{-t^2/2} \cdot (t^2 - 1)$		Dieses Wavelet ist das an der t-Achse gespiegelt Wavelet 3.

Nr.	Wavelet	Plot des Wavelets	Anmerkungen
5	Morlet-Cosinus mit $\omega_0 = 5$: $\psi(t) = e^{-t^2} \cdot \cos(\omega_0 t)$		Mit einer Cosinusfunktion der Frequenz ω_0 modulierte Gauß-Funktion. Dieses Wavelet kann mit der IDL-Prozedur WAVELET.PRO (P 476/38) berechnet werden (Keyword: /MORLET_COS).
6	Morlet-Sinus mit $\omega_0 = 5$: $\psi(t) = e^{-t^2} \cdot \sin(\omega_0 t)$		Mit einer Sinusfunktion der Frequenz ω_0 modulierte Gauß-Funktion. Dieses Wavelet kann mit der IDL-Prozedur WAVELET.PRO (P 476/38) berechnet werden (Keyword: /MORLET_SIN).
7	Grossmann mit $(5 \leq \omega_0 \leq 6)$; hier $\omega_0 = 5,33$: $\psi(t) = e^{-t^2/2} \cdot e^{j\omega_0 t}$		Dieses Wavelet ist die mit ω_0 modulierte Gauß-Funktion. Im Plot ist nur der Realteil des Wavelets dargestellt. Mit diesem von Grossmann untersuchten Wavelet [2] lassen sich besonders gut abrupte Änderungen eines Signals, die im Zeitbereich nicht zu erkennen sind, untersuchen (signal detection). Von Tuteur sind mit diesem Wavelet klinische EKGs bzgl. der VLPs (ventricular late potentials) untersucht worden [7].
8	Lemarie-Mallat mit \bar{H} und Φ nach [6]: $\Psi(\omega) = e^{-j\omega/2} \cdot \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$	(Plot folgt in der nächsten Edition.)	Für dieses Wavelet, das nicht auf der Gauß-Funktion basiert, ist die orthonormale Basis in $L^2(\mathbf{R})$ bewiesen [5, 6]. Es eignet sich sehr gut für die Verarbeitung von Bildsignalen, aber auch von EEG-Signalen. Das Wavelet ist symmetrisch zu $t = \frac{1}{2}$ (!) und klingt exponentiell ab. Dieses Wavelet kann mit der IDL-Prozedur WAVELET.PRO (P 476/38) berechnet werden (Keyword: /LEMARIE).
9	Daubechies Ein Beispiel (6-tap filter) mit: $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}$ $\beta = 2^{-9/2}$	$h(0) = \beta(1 + \sqrt{10} + \alpha)$ $h(1) = \beta(5 + \sqrt{10} + 3\alpha)$ $h(2) = \beta(10 - 2\sqrt{10} + 2\alpha)$ $h(3) = \beta(10 - 2\sqrt{10} - 2\alpha)$ $h(4) = \beta(5 + \sqrt{10} - 3\alpha)$ $h(5) = \beta(1 + \sqrt{10} - \alpha)$	Die von Ingrid Daubechies 1988 entdeckten Wavelets sind in ihrem Verhalten alle orthonormal [12]. Sie eignen sich sehr gut für die Verarbeitung von Bild- und Videosignalen (Datenreduktion), aber auch von EEG-Signalen. Daubechies-Wavelets sind diskrete Wavelets – eine analytische Formel existiert nicht. Die diskreten Koeffizienten müssen sorgfältig und mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden [13].

3. Sonstige Hinweise:

- In diesem Merkblatt wird die unabhängige Variable mit t (Zeit) bezeichnet. Natürlich kann diese auch ein Ort x sein.
- Die Funktionsplots in diesem Merkblatt wurden mit dem Softwarepaket „Mathematica“ [4] auf einem MAC Quadra-700 als Encapsulated PostScript-File (eps) angefertigt.

4. Literatur:

- [1] Combes, J. M. et al. (Eds.): Wavelets – Time-Frequency Methods and Phase Space. Berlin: Springer 1990 (2. Auflage). ISBN: 3-540-53014-2.
- [2] Grossmann, A., and J. Morlet: Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. SIAM J. Mathem., Vol. 15, 723–736, 1984.
- [3] Dittberner, K.-H.: Die Wavelet Transformationen in der Signal-datenverarbeitung – Teil 1. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 57, 1990.
- [4] Wolfram Research, Inc.: Mathematica Version 2.0. Campaign (USA), 1991. Email: info@wri.com. Siehe auch wdv-notes Nr. 71.
- [5] Lemarie, P. G.: Ondellettes a localisation exponentielles. J. Mathem. Pures Appl., 1990.

- [6] Mallat, St. G.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 11, 674–693, 1989.
- [7] Tuteur, F. B.: Wavelet Transformations in Signal Detection. In [1], 133–138, 1990.
- [8] Arneado, A., G. Grasseau, and M. Holschneider: Wavelet Transform Analysis in Invariant Measure of Some Dynamical Systems. In [1], 182–196, 1990.
- [9] Bracewell, R. N.: The Fourier Transform and Its Applications. New York: McGraw-Hill 1978 (2. Auflage). ISBN: 0-07-007013-X.
- [10] Papoulis, A.: The Fourier Integral and Its Applications. New York: McGraw-Hill 1962.
- [11] Meyer, Y.: Orthonormal Wavelets. In [1], 21-37, 1990.
- [12] Daubechies, I.: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Commun. Pure Applied Mathematics, Vol. 41, 909–996, 1988.
- [13] Strang, G.: The optimal coefficients in Daubechies wavelets. Physica D, Vol. 60, 239–244, 1992.