

Zur exakten Beschreibung von Systemen der Natur eignen sich besonders die Darstellung und die Behandlung als *axiomatische System-Modelle* [1, 2]. In der biologischen Grundlagenforschung ist diese Art der Beschreibung noch wenig bekannt.

Allgemein stellt ein *System* einen mathematischen Operator dar, also eine Vorschrift, die Eingangssignale in (andere) Ausgangssignale transformiert [3]. Axiomatische – auf Axiomen beruhende – Modelle sind dadurch gekennzeichnet, daß sie über das „Innenleben“ der Systeme eindeutige Aussagen enthalten. Die Beschreibung dieser Innenstruktur erfolgt durch die Einführung systeminterner Zustandsvariablen, weswegen die axiomatischen System-Modelle auch als *Zustandsraum-Modelle* bezeichnet werden.



Mit diesen Zustandsraum-Modellen (state space models) lassen sich grundsätzlich alle bekannten Fakten eines natürlichen Systems abbilden. Gegenüber den sogenannten „Black-Box“-Modellen, die ausschließlich die Ein-/Ausgangs-Beziehungen in der Form von Übertragungsfunktionen (transfer functions) darstellen können, und die über den inneren Aufbau der Systeme keinerlei Aussagen machen, ist dieses ein erheblicher Vorteil.

In diesem Merkblatt wird ein erster Einblick – ein Überblick – in die grundlegende Darstellung der axiomatischen System-Modelle gegeben. In dieser Darstellung werden die übersichtlichen Notationsmöglichkeiten mit Vektoren und Matrizen verwendet [7].

**1. Definition von Größen und Notation:**

**N** = Menge der natürlichen Zahlen = {1, 2, 3, ...}.

**Z** = Menge der ganzen Zahlen (integer) = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

**R** = Menge der reellen Zahlen (real).

*e* = Eulersche Zahl =  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718\ 281\ 828\ \dots$

$\pi = 3,141\ 592\ 654\ \dots$

$\dots \in \dots = \dots$  ist Element der Menge ...

**R<sup>n</sup>** = Euklidischer Raum von *n* Dimensionen.

*f(z)* = (Signal-)Funktion der kontinuierlichen Variablen *z*. Zeitfunktion, wenn *z* die Zeit *t* ist; *f* ∈ **R**.

**x** = Vektor der Eingangssignale (input vector).

**y** = Vektor der Ausgangssignale (output vector).

**v** = Vektor der Zustandsvariablen (state vector).

*p* = Anzahl der Eingangssignale *x(t)*.

*q* = Anzahl der Ausgangssignale *y(t)*.

*n* = Anzahl der Zustandsvariablen *v(t)*.

**A** = System - Matrix (system matrix). Ordnung = (*n, n*)

**B** = Eingangsmatrix (input matrix). Ordnung = (*n, p*)

**C** = Ausgangsmatrix (output matrix). Ordnung = (*q, n*)

**D** = Durchgangsmatrix (transit matrix). Ordnung = (*p, q*)

**2. Die Beschreibung axiomatischer System-Modelle:**

Ein kontinuierliches System der Natur kann durch das Matrizenpaar (1) und (2) eindeutig und vollständig beschrieben werden, wobei *NL* für im jeweiligen Anwendungsfall geeignete *nichtlineare* Glieder steht.

Die quadratische *System-Matrix A* bestimmt dabei die innere Dynamik des Systems. Mit der *Eingangsmatrix B* wird die Art der Ansteuerung/Erregung des Systems beschrieben. Die *Ausgangsmatrix C* bildet den Einfluß der inneren Zustandsvariablen *v* auf die Ausgangsgrößen *y* des

Systems ab. Die direkten Einwirkungen ohne Energiespeicherung der Eingangsgrößen *x* auf die Ausgangsgrößen *y* werden durch die *Durchgangsmatrix D* beschrieben.

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \quad [+NL] \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad [+NL] \quad (2)$$

In einem axiomatischen System-Modell wird für jedes innere, energiespeichernde Element eine Zustandsvariable definiert. Die Gleichung (1) beschreibt den zukünftigen (!) Zustand

des Systems. Die Abhängigkeit der Ausgangsgrößen *y* des Systems von den Eingangsgrößen *x* und den Zustandsvariablen *v* wird durch die Gleichung (2) beschrieben.

**3. Zur Lösung der Differentialgleichungen:**

Mit geeigneten Computer-Methoden läßt sich das Differentialgleichungssystem (1) und (2) eines axiomatischen System-Modells iterativ lösen. Dabei kann z. B. *Mathematica* [4, 5] ein wichtiges Werkzeug sein. Für den linearen Fall (*NL* = 0) gilt die allgemeine Lösung:

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{v}(0) + \int_{\tau=0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (3)$$

**4. Ein Beispiel:**

Ein bereits von der Abt. Wissenschaftliche Datenverarbeitung ausgearbeitetes Beispiel findet man auf den Seiten 49–55 in [6] und demnächst auch unter [http://www.khd-](http://www.khd-research.net/Sci/Math/Axiomat_Systemmodell.pdf)

[research.net/Sci/Math/Axiomat\\_Systemmodell.pdf](http://www.khd-research.net/Sci/Math/Axiomat_Systemmodell.pdf) im Internet.

**5. Literatur:**

[1] Elgerd, O.: Control System Theory. New York: McGraw Hill 1967.  
 [2] Healey, M.: Introduction to dynamic analysis in the time domain using state variables. Electronic Engineering, Feb. 1968.  
 [3] Dittberner, K.-H.: Die Fourier-Transformation in der Signaldatenverarbeitung – Teil 1. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 33, 1990–1992.  
 [4] Mathematica Version 2.0. Champaign (USA): Wolfram Research, Inc. 1991. Aktuelle Informationen gibts per Email: info@wri.com.  
 [5] Dittberner, K.-H.: MAC-Software: Mathematica V 2.0. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 71, 1990–1992.  
 [6] Zerbst, E.: Bionik – Biologische Funktionsprinzipien und ihre technische Anwendungen. Stuttgart: Teubner 1987. ISBN: 3-519-03607-X. – [BU 681].  
 [7] Dittberner, K.-H.: Vektoren und Matrizen in der Signaldatenverarbeitung – Teil 1. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 175, 1979–1993.