Vektoren und Matrizen in der Signaldatenverarbeitung – Teil 1.

 Karl-Heinz Dittberner

Zum Verständnis vieler Algorithmen der Signaldatenverarbeitung ist heute die Kenntnis der Kalküle mit Vektoren und Matrizen unerläßlich.

Durch die Verwendung von Vektoren und Matrizen wird eine klarere Problemdarstellung und eine wesentliche Vereinfachung bei der Lösung erzielt [1, 2]. Steht für die Formulierung des Problems außerdem eine Programmiersprache zur Verfügung, welche die Operationen mit Vektoren und Matrizen „versteht", d. h. diese direkt unterstützt, dann ist die Anfertigung der Programme besonders effektiv. Ein solche Sprache ist z. B. die Interactive Data Language IDL der Firma Research Systems, Boulder (USA) [3].

In diesem Merkblatt sind die grundlegenden Definitionen und Rechenoperationen der Matrizen-Algebra für endlichdimensionale Vektorräume in konzentrierter Form dargestellt.

1. Definitionen:

Betrachtet wird zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Dieses kann durch die Schemata **A**, **x** und **y** beschrieben werden:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Das Schema **A** mit $n = 3$ Zeilen, $m = 3$ Spalten und mit den Elementen a_{ik} wird *Matrix* oder *Matrize* genannt. Der 1. Index i gibt die Zeilennummer, der 2. Index k gibt die Spaltennummern an. *Merke*: **Z**eile **z**uerst, **Sp**alte **sp**äter. Die Ordnung einer Matrix ist (n, m). Die Schemata **x** und **y** heißen *Spaltenvektoren*. Ein Spaltenvektor ist ein Sonderfall einer Matrix, eine Matrix der Ordnung $(n, 1)$. Eine Matrix der Ordnung $(1, m)$ wird *Zeilenvektor* genannt; z. B.:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Das lineare Gleichungssystem (1) läßt sich mit diesen Definitionen in folgender Matrixform schreiben:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad (4)$$

Die Matrix **A** läßt sich somit als ein *Operator* deuten, der den Vektor **x** in den Vektor **y** transformiert bzw. linear abbildet.

2. Addition von Matrizen:

Die Addition von (n, m)-Matrizen ist durch die Addition der jeweiligen Matrixelemente definiert. Gegeben seien **A** und **B** mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Die Summen-Matrix von **A** und **B** berechnet sich dann nach

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Das neutrale Element der Addition ist die *Nullmatrix* **0**, bei der jedes Matrixelement gleich Null ist. Die Addition von Matrizen unterschiedlicher Ordnung ist *nicht* definiert.

3. Transponieren einer Matrix:

Werden bei einer Matrix **A** die Zeilen und Spalten vertauscht, so heißt die neue Matrix $\mathbf{A}^T$ die *Transponierte Matrix* von **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Das Transponieren eines Spaltenvektors ergibt einen Zeilenvektor. Versteht man unter einem Vektor **x** immer einen Spaltenvektor, dann läßt sich dieser als Zeilenvektor notieren mit:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

4. Multiplikation mit einem Skalar:

Eine Matrix wird mit einem Skalar λ multipliziert, in dem jedes Matrixelement mit dem Skalar λ multipliziert wird.

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

5. Null- und Einheitsmatrix:

Eine *Nullmatrix* **0**, bei der jedes Matrixelement gleich Null ist, existiert für jede Ordnung (n, m). Die *Einheitsmatrix* **1** ist hingegen nur für *quadratische Matrizen* $(n = m)$ definiert. Die Ordnung n wird oft als Index notiert: $\mathbf{1}_n$.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Die Elemente der Einheitsmatrix werden mit δ_{ik}, dem Kronecker-Symbol bezeichnet. Es gilt: $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$ und $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

6. Skalare Matrizen:

Eine *skalare Matrix* **A** der Ordnung n läßt sich als Produkt eines Skalars λ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ darstellen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{1}_3 \qquad (11)$$

7. Gleichheit von Matrizen:

Zwei Matrizen **A** und **B** sind dann und nur dann gleich, wenn sie von gleicher Ordnung (n, m) sind und ihre Differenz eine Nullmatrix **0** ist. Das bedeutet, daß jedes Element a_{ik} der Matrix **A** gleich dem entsprechenden Element b_{ik} der Matrix **B** sein muß.

8. Inneres Produkt zweier Vektoren:

Das *innere Produkt* ist definiert als das Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor, wobei beide Vektoren die gleiche Anzahl von Elementen haben müssen. *Merke*: **Z**eilenvektor **z**uerst, **Sp**altenvektor **sp**äter.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}^T | \mathbf{y} \rangle &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ \langle \mathbf{x}^T | \mathbf{y} \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

Da das Ergebnis des inneren Produkts ein Skalar ist, wird es auch *Skalarprodukt* zweier Vektoren genannt.

9. Multiplikation von Matrizen:

Die Matrizenmultiplikation ist nur definiert (ausführbar), wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix **A** gleich der Zeilenanzahl der zweiten Matrix **B** ist. Das heißt, wenn (n, p) die Ordnung von **A** ist, muß (p, m) die Ordnung von **B** sein. Daher kann das

Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existieren, das Produkt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ aber nicht. Die Produktmatrix $\mathbf{C}$ ist dann von der Ordnung (n, m). Ihre Elemente c_{ik} sind gleich dem inneren Produkt (Punkt 8) des i-ten Zeilenvektors von $\mathbf{A}$ und des k-ten Spaltenvektors von $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1{}^T | \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1{}^T | \mathbf{b}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1{}^T | \mathbf{b}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2{}^T | \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2{}^T | \mathbf{b}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2{}^T | \mathbf{b}_3 \rangle \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2+2 & 0+6 & 4-12 \\ 2+3 & 0+9 & -4-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -8 \\ 5 & 9 & -22 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Bei der Multiplikation von Matrizen kommt es auf die Reihenfolge der Matrizen an. Sie ist nicht allgemein vertauschbar.

10. Determinante einer Matrix:

Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ – z. B. gemäß Gl. (2) – ist die Berechnung der Determinante wie folgt definiert:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (18)$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{12}(a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + a_{13}(a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31}) \qquad (19)$$

Für höhere Ordnungen erfolgt die Berechnung sinngemäß. Matrizen mit $|\mathbf{A}| \neq 0$ heißen *regulär* und mit $|\mathbf{A}| = 0$ heißen *singuläre* Matrizen. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht (transponiert).

11. Adjungierte Matrix:

Die adjungierte Matrix $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ oder $\mathbf{A}^*$ erhält man aus $\mathbf{A}$, in dem jedes Element a_{ik} durch sein algebraisches Komplement

$$\bar{a}_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot |a_{ik}| \qquad (20)$$

(Adjunkte) ersetzt wird, wobei $|a_{ik}|$ die Unterdeterminante zu a_{ik} ist, *und* diese Matrix transponiert. Eine ausführliche Darstellung findet im Kapitel „Lineare Algebra" von [2]. Das Produkt aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ ergibt eine skalare Matrix, in deren Hauptdiagonalen der Wert von $|\mathbf{A}|$ steht.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{1} \qquad (21)$$

12. Inverse Matrix:

Betrachtet wird die Matrizengleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{1}$. Gegeben sei die quadratische, nichtsinguläre Matrix $\mathbf{A}$. Wie bestimmt sich daraus die Matrix $\mathbf{B}$? Aus der Gleichung (21) folgt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} \qquad (22)$$

Die Matrix $\mathbf{B}$ wird als zu $\mathbf{A}$ *inverse Matrix* bezeichnet und deshalb symbolisch als $\mathbf{A}^{-1}$ geschrieben. Es gilt also:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad (23)$$

Für die Berechnung von inversen Matrizen stehen heute auf Computern unter Anwendung des Gaußschen Algorithmus besonders effiziente Programme (z. B. das INVERT(matrix) unter IDL) zur Verfügung.

13. Inverse einer transponierten Matrix:

Für quadratische und reguläre Matrizen gilt:

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \qquad (24)$$

14. Inverse eines Produkts von Matrizen:

Für quadratische und reguläre Matrizen, die alle die gleiche Ordnung haben, gilt:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad (25)$$

15. Länge eines Vektors (Norm):

Die Länge eines Vektors $\mathbf{x}$ wird durch seine Norm bestimmt. Die Euklidische Norm (es gibt auch noch andere Norm-Definitionen) ist definiert durch:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}^T | \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2} \qquad (26)$$

16. Dyadisches Produkt zweier Vektoren:

Das Produkt aus einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor ist bereits unter Punkt 8 behandelt. Der umgekehrte Fall, das Produkt aus einem Spaltenvektor und einem Zeilenvektor wird *dyadisches Produkt* genannt und berechnet sich nach

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\, x_1 & y_1\, x_2 & y_1\, x_3 \\ y_2\, x_1 & y_2\, x_2 & y_2\, x_3 \\ y_3\, x_1 & y_3\, x_2 & y_3\, x_3 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Das Ergebnis ist eine Matrix. Wenn $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ist, dann ist das Ergebnis die *Korrelationsmatrix*.

17. Symmetrische Matrizen:

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt *symmetrisch*, wenn $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ist, d. h. die Matrix muß quadratisch sein und $a_{ik} = a_{ki}$. Die Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen. Weiterhin gilt:

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-1} \qquad (28)$$

Falls $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, so heißt die Matrix *schiefsymmetrisch* mit $a_{ik} = -a_{ki}$. Die Hauptdiagonale besteht in diesem Fall aus Nullen.

18. Orthogonale Matrizen:

Zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind *orthogonal*, wenn $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$ ist. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \qquad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \qquad (29)$$

Die zu $\mathbf{A}$ orthogonale Matrix $\mathbf{B}$ erhält man also durch Transponierung oder durch Inversion der gegebenen Matrix $\mathbf{A}$.

Ein Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad (30)$$

19. Literatur (1.Teil):

[1] Reinhardt, F. und Soeder, H.: DTV-Atlas zur Mathematik. Band 1: Grundlagen, Algebra und Geometrie. München: DTV 1980 (4. Auflage), ISBN: 3-423-03007-0. Preis: 14,80 DM. – [BU 608].

[2] Dreszer, J. (Ed.): Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Zürich: H. Deutsch. ISBN: 3-87144-149-X. Preis: 59,80 DM. – [BU 666].

[3] Dittberner, Karl-Heinz: Interactive Data Language IDL: Eine Einführung. FU Berlin (IfP): wdv-notes Nr. 85, 1988–1993.